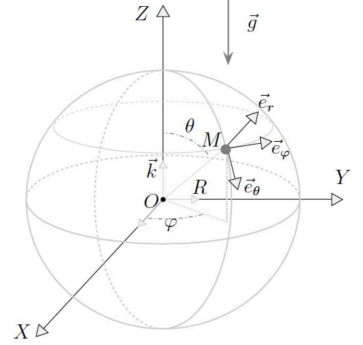


Contrôle de Rattrapage de Mécanique Analytique et Vibrations
Filière SMP-S5
Temps imparti 2H00

Exercice 1 : Point matériel sur la surface intérieure d'une sphère

Soit M un point matériel de masse m se déplaçant sans frottement sur la surface intérieure d'une sphère creuse de rayon interne R , voir figure ci-contre. Soit $\mathcal{R}(O, XYZ)$ un référentiel galiléen. La position de M est repérée par $\vec{OM} = R\vec{e}_r$, $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ étant la base sphérique. Soit $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi$ le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à \mathcal{R} , \vec{k} étant le vecteur unitaire de l'axe (OZ) . On utilise dans la suite de l'exercice (θ, φ) comme coordonnées généralisées pour décrire le mouvement de M .



1. Etablir l'expression de la vitesse de M dans \mathcal{R} et déduire l'expression de l'énergie cinétique T de M par rapport à \mathcal{R} .
2. Etablir l'expression du moment cinétique de M par rapport à O dans \mathcal{R} , $\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})$.
3. Etablir l'expression de l'énergie potentielle V de M .
4. Montrer que le Lagrangien de M est donné par

$$\mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}; t) = \frac{1}{2}mR^2 (\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) - mgR\cos\theta$$

Déterminer l'expression du Hamiltonien $\mathcal{H}(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi; t)$ de M . En déduire l'existence de deux intégrales premières dont on détermine les expressions. Montrer que l'une des intégrales premières est la composante selon (OZ) du moment cinétique $\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})$.

5. Etablir les équations de Hamilton et étudier les deux cas suivants :
 - a. **Cas où $\varphi = \text{Constante}$** : Déduire l'équation différentielle vérifiée par θ et trouver la solution $\theta(t)$ dans le cas des petites oscillations aux voisinages de π , sachant que les conditions initiales sont $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.
Indication : Après avoir établi l'équation, faire un développement limité au premier ordre aux voisinages de $\theta = \pi$.
 - b. **Cas où $\theta = \text{Constante}$** : Que deviennent les équations du mouvement ? En déduire la nature du mouvement. Trouver l'expression de $\dot{\varphi}$ et déduire les valeurs qui peuvent être prises par θ .

Exercice 2 : Calcul variationnel - Corde pesante

Considérons un système (Σ) formé par une corde massive de masse linéique constante μ et de longueur L dans le plan (xOz) . L'une des extrémités de la corde est fixée à l'origine O et l'autre au point A de coordonnées $(x_A = a, z_A = h)$ tel que $\sqrt{a^2 + h^2} \leq L$. L'axe (Oz) est ascendant (L'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g\vec{k}$, \vec{k} étant le vecteur unitaire de (Oz)). On se propose de déterminer la forme $z = z(x)$ de (Σ) à l'équilibre¹ en minimisant l'énergie potentielle de la corde sachant que sa longueur doit vérifier la relation intégrale $L = \int_0^a \sqrt{1 + z'^2} dx$ avec $z' = dz/dx$ que l'on considère comme une contrainte.

1. Soit dl un élément de longueur de la corde dans l'intervalle $[x, x+dx]$. Etablir l'expression de l'énergie potentielle dV sous l'effet de son poids. En déduire sous forme intégrale l'énergie potentielle V de la corde.

1. L'énergie potentielle de la corde est minimale.

2. Pour minimiser l'énergie potentielle de la corde en tenant compte de la contrainte de la longueur, on introduit un multiplicateur de lagrange λ et on minimise la quantité $V + \lambda L = V + \lambda \int_0^a \sqrt{1 + z'^2} dx$. On pose $z_\lambda = -\frac{\lambda}{\mu g}$.
- Trouver la quantité qui joue le rôle du lagrangien, $\mathcal{L}(z, z' = \frac{dz}{dx}; x)$, telle que $V + \lambda \int_0^a \sqrt{1 + z'^2} dx = \int \mathcal{L}(z, z'; x) dx$.
 - Appliquer l'équation de lagrange et trouver l'équation différentielle vérifiée par $z(x)$.
 - On pose $u(x) = z(x) - z_\lambda$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u(x)$. On pose $u'(x) = \frac{du(x)}{dx} = \sinh[\phi(x)]$ où \sinh est le sinus hyperbolique et $\phi(x)$ une fonction dérivable. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u(x)$ devient

$$u(x)\phi'(x) = \cosh(\phi(x)) \text{ où } \phi'(x) = \frac{d\phi(x)}{dx}.$$

- Montrer que $\phi(x) = \alpha x + \beta$ où α et β sont des constantes arbitraires. En déduire que la solution en u est de la forme $u(x) = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x + \beta)$.
- En déduire finalement la solution $z = z(x)$ et préciser le système d'équations vérifié par z_λ , α et x_0 .²

On donne $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$, $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ et $1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$.

Exercice 3 : Transformations canoniques

Vérifier si la transformation de contact suivante est canonique :

$$\begin{cases} P &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{q^2}{p^2} (1 - p^2) \\ Q &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{p}{q} \end{cases}$$

et ce en utilisant deux méthodes différentes.

Exercice 4 : Physique pas vraiment classique

Considérons un système physique à un seul degré de liberté et dont le mouvement est décrit par le Hamiltonien suivant $H(q, p; t) = \kappa p^2 q^2$ où $\kappa > 0$.

- Ecrire les équations canoniques du mouvement.
- Retrouver le lagrangien correspondant à cet Hamiltonien. En déduire l'existence d'une intégrale première.
- On se propose de trouver la solution de cet exercice en utilisant la méthode de Hamilton-Jacobi.
 - Ecrire l'équation de Hamilton-Jacobi. En utilisant la méthode de séparation des variables, trouver l'expression de la fonction principale de Hamilton $S(q; \alpha = E = P, t)$ ³.
 - Trouver les solutions $q = q(t)$ et $p = p(t)$. On rappelle que $p = \frac{\partial S(q; P, t)}{\partial q}$ et $Q = \frac{\partial S(q; P, t)}{\partial P}$.
 - Vérifier que les solutions trouvées satisfont bien aux équations canoniques du mouvement.

2. Utiliser les conditions aux limites $z(0), z(a)$ et la contrainte.

3. Résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi et calculer l'intégrale obtenue.