

Fundamentos de Cálculo

(1)

I. P y T y propiedades

1. Combinatoria y binomio de Newton:

Def. Número combinatorio de n sobre K . Notación: $\binom{n}{K}$

Sea A un conjunto cualquiera de n elementos. $\binom{n}{K}$ indica el n° de subconjuntos de A con K elementos.

(Ej) $A = \{a, b, c\} \Leftrightarrow n = 3$, para $K = 0, 1, 2, 3$ tenemos que:

$$\binom{3}{0}: \emptyset$$

$$\binom{3}{2}: \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}$$

$$\binom{3}{1}: \{a\}, \{b\}, \{c\}$$

$$\binom{3}{3}: \{a, b, c\}$$

Por tanto, si contamos el n° de subconjuntos en cada caso:

$$\binom{3}{0} = 1, \binom{3}{1} = 3, \binom{3}{2} = 3, \binom{3}{3} = 1$$

Propiedad Generalizando obtendremos algunas identidades notables:

$$\boxed{\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{n} = 1}$$

Y dos relaciones importantes:

$$\boxed{\binom{n}{n-K} = \binom{n}{K}}$$

$$\boxed{\binom{n}{K} = \binom{n-1}{K-1} + \binom{n-1}{K}} = \binom{n+1}{K} - \binom{n}{K-1}$$

Triángulo de Pascal / Tartaglia

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\ \text{etc.} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ \text{etc.} \end{array}$$

Def. K -variaciones de n elementos. Notación: $V(n, K)$.

Se trata de la cantidad de listas ordenadas posibles de K elementos del conjunto A .

(Ej) $A = \{a, b, c\} \Leftrightarrow n = 3$, para $K = 0, 1, 2, 3$ obtenemos:

$$V(3, 0): \emptyset$$

$$V(3, 2): ab, ba, ac, ca, bc, cb$$

$$V(3, 1): a, b, c$$

$$V(3, 3): abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

$$\text{Por lo tanto: } V(3, 0) = 0, V(3, 1) = 3, V(3, 2) = 6, V(3, 3) = 6$$

En general:

$$\boxed{V(n, K) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-K+1)}$$

- Nótese que si $K=n \Rightarrow V(n,n) = n(n-1)(n-2)\dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, cuyo resultado nos da el número de permutaciones posibles, lo cual constituye la definición del factorial.

$$V(5,5) \stackrel{\text{def}}{=} 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

En general:

$$V(n,K) = \frac{n!}{(n-K)!}$$

$$V(n,n) = n!$$

Por convenio: $0! = 1$

- Cálculo de números combinatorios usando las definiciones anteriores:

$$\binom{n}{K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V(n,K)}{V(K,K)} = \frac{V(n,K)}{K!} = \frac{n!}{K!(n-K)!}$$

Ej) $\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = 252$

- Cálculo del n° de aplicaciones posibles entre un conj. X de K elementos y un conj. Y de n elementos.

- $X \rightarrow Y$: n^K aplicaciones
- para $n \geq K$, $X \rightarrow Y$ inyectivas: $V(n,K) = \frac{n!}{(n-K)!}$
- para $X=Y$, $X \rightarrow Y$ biyectivas: $K! \text{ (o } n!)$

- Observación: Sea A un conjunto de n elementos, el n° de subconjuntos que se pueden formar de A equivale al n° de aplicaciones entre A y un conjunto cualquiera de 2 elementos. Por tanto: 2^n .

A	B	Recorda:
		INYECTIVIDAD: $\forall x \in A, \exists! y \in B \mid f(x)=y$
		SOBREVECTIVA/EXHAUSTIVA: $\forall y \in B, \exists x \in A \mid f(x)=y$
		BIYECTIVIDAD: $\forall y \in B, \exists! x \in A \mid f(x)=y$

La suma de los n° combinatorios de una fila n del triángulo de Tartaglia equivale al n° de subconjuntos de A, por tanto:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

- Sumatorio: Ej) a) $\sin x + 2 \sin \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{4} + 8 \sin \frac{x}{8} + \dots + 2^n \sin \frac{x}{2^n} \approx \sum_{k=0}^n 2^k \cdot \sin \frac{x}{2^k}$

b) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{23}{47} = \sum_{k=1}^{23} \frac{k}{(2k+1)}$

c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$

d) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

- Aplicación del sumatorio a la demostración/resolución de sumas:

Ej) Demuestra que $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n}$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{(k-1)k} \right) = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) =$$

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} \right)$$

$$\frac{1}{(k-1)k} = \frac{A}{k-1} + \frac{B}{k} \Rightarrow \begin{cases} Ak + Bk - B = 1; \\ k(A+B) - B = 1; \\ A=1, B=-1 \end{cases}$$

$$= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} \right) - \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} \right) - \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} \right) = 1 + \cancel{\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{k} \right)} - \cancel{\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{k} \right)} - \frac{1}{n} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \quad \text{q.e.d.}$$

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

(Ej) Calcule: $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1/2}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \right) - \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{k} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \left(\frac{1}{k} \right) =$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} \Rightarrow \begin{cases} (k+1)(k+2)A + k(k+2)B + (k+1)kC = 1 \\ k^2A + 3kA + 2A + k^2B + 2kB + k^2C + kC = 1 \\ k^2(A+B+C) + k(3A+2B+C) + 2A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ 3/2 + 2B - 1/2 - B = 0; B = -1 \\ C = 1/2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \right) - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{n+2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{n+2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{(n+2)(n+1)} \right)$$

• Binomio de Newton: Cálculo de potencias de una suma.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

otra sumatoria: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

(4)

Ej) Desarrolla $(2x^3 - \frac{1}{x})^{12}$ y observa si alguno de sus términos No contiene x

$$\begin{aligned} \left(2x^3 - \frac{1}{x}\right)^{12} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (2x^3)^{12-k} \left(-\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (-1)^k \cdot x^{-k} \cdot 2^{12-k} \cdot x^{36-3k} = \\ &= \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (-1)^k \cdot 2^{12-k} \cdot x^{36-4k} \end{aligned}$$

Notar que para $k=9$, $x^{36-4k} = x^0 = 1$,

luego no habrá términos que contengan x entonces.

Ej) Desarrolla $(x^2 + 3\sqrt{x})^{10}$ y observa si tiene términos en $\frac{1}{2}$ aparecen x^{10} y x^{11}

$$\left(x^2 + 3\sqrt{x}\right)^{10} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (x^2)^{10-k} (3\sqrt{x})^k = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{20-2k} \cdot 3^k \cdot x^{\frac{k}{2}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 3^k \cdot x^{20 - \frac{3}{2}k}$$

$$-2 + \frac{1}{2} = \frac{-4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$\rightarrow 20 - \frac{3}{2}k = 10 \Leftrightarrow \frac{3}{2}k = 10 \Leftrightarrow k = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$$

• luego no habrá términos con x^{10}

$$\bullet 20 - \frac{3}{2}k = 11 \Leftrightarrow \frac{3}{2}k = 9 \Leftrightarrow k = \frac{18}{3} = 6 \in \mathbb{N}$$

Si habrá términos x^{11} , cuando $k=6$.

Ej) Demuestra que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Recuerda: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)! \cdot (k+n-k)}{k!(n-k)!} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (k-1)! = \frac{k!}{k} \\ (n-k-1)! = \frac{(n-k)!}{(n-k)} \end{array} \right.$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad \boxed{\text{q. e. d.}}$$

Nota: Dado que $V(n, k) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \cdot (n-k)! = n!$