

**08.**

**PROPOSTAS  
DE RESOLUÇÃO  
MANUAL**

Materiais disponíveis em formato fotocopiável e projetável em

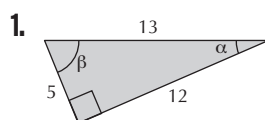
**20** AULA DIGITAL  
PROFESSOR



# Tema I - Trigonometria e Funções Trigonométricas

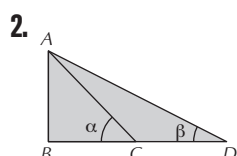
## Unidade 1 - Revisões

Páginas 9 a 11



$$\sin \alpha = \frac{5}{13}; \cos \alpha = \frac{12}{13}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$$

$$\sin \beta = \frac{12}{13}; \cos \beta = \frac{5}{13}; \operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5}$$



$$\sin \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{\overline{AB}}{15} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{4 \times 15}{5}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 12$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{12}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{4 \times 12}{3}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = 16$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 12^2 + \overline{BC}^2 = 15^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 225 - 144 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 81$$

Logo,  $\overline{BC} = 9$ .

Tem-se, então,  $\overline{CD} = \overline{BD} - \overline{BC} = 16 - 9 = 7$ .

3.

$$\text{a) } (\sin 60^\circ - \sin 45^\circ)^2 = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{3}{4} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{b) } \frac{3 \operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - 2 \cos 30^\circ} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3 + 1 + \sqrt{3}}{1 - 3} =$$

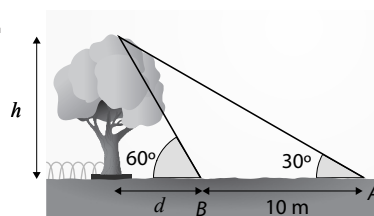
$$= -\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = -2 - \sqrt{3}$$

$$\text{c) } \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1$$

$$\text{d) } \sin 80^\circ - \cos 10^\circ = \sin 80^\circ - \sin (90^\circ - 10^\circ) = \sin 80^\circ - \sin 80^\circ = 0$$

$$\text{e) } \operatorname{tg} 74^\circ \times \operatorname{tg} 16^\circ = \operatorname{tg} 74^\circ \times \frac{1}{\operatorname{tg} (90^\circ - 16^\circ)} = \frac{\operatorname{tg} 74^\circ}{\operatorname{tg} 74^\circ} = 1$$

4.



Sejam  $h$  a altura da árvore e  $d$  a distância entre o ponto  $B$  e a árvore.

Então:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{d+10} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{d+10} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}d + 10\sqrt{3}}{3}$$

Por outro lado:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{d} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{d} \Leftrightarrow h = \sqrt{3}d$$

Logo:

$$\frac{\sqrt{3}d + 10\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}d \Leftrightarrow \sqrt{3}d + 10\sqrt{3} = 3\sqrt{3}d$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}d = 10\sqrt{3} \Leftrightarrow d = 5$$

Tem-se, então, que  $h = \sqrt{3}d = 5\sqrt{3}$ , ou seja, a altura da árvore é  $5\sqrt{3}$  metros.

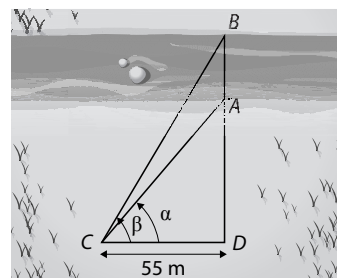
5.

$$\text{a) } (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) &= \sin^2 x - \cos^2 x = \\ &= \sin^2 x - (1 - \sin^2 x) = \\ &= \sin^2 x - 1 + \sin^2 x = \\ &= 2 \sin^2 x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} &= \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \\ &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

6.



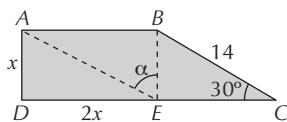
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{\overline{AD}}{55} \Leftrightarrow \overline{AD} = 55 \operatorname{tg} 40^\circ$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 62^\circ = \frac{\overline{BD}}{55} \Leftrightarrow \overline{BD} = 55 \operatorname{tg} 62^\circ$$

Logo,  $\overline{AB} = \overline{BD} - \overline{AD} = 55 \operatorname{tg} 62^\circ - 55 \operatorname{tg} 40^\circ \approx 57,3$ . Assim, a largura aproximada do rio é 57,3 metros.

7.

a)



$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{BE}}{14} \Leftrightarrow \overline{BE} = \frac{14}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BE} = 7$$

$$\text{Logo, } \overline{DE} = 2 \times \overline{BE} = 2 \times 7 = 14.$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{EC}}{14}$$

$$\Leftrightarrow \overline{EC} = \frac{14\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{EC} = 7\sqrt{3}.$$

Então, o perímetro do trapézio é:

$$7 + 14 + 7\sqrt{3} + 14 + 14 = 49 + 7\sqrt{3}$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2x}{x} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2$$

$$\text{Logo, } \alpha = \operatorname{tg}^{-1}(2) \approx 63,43^\circ.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(\operatorname{tg} 72^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ) = 120 \operatorname{tg} 72^\circ \\ x = \frac{120 \operatorname{tg} 72^\circ}{\operatorname{tg} 72^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{120 \operatorname{tg} 72^\circ}{\operatorname{tg} 72^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ} \times \operatorname{tg} 63^\circ \\ x = \frac{120 \operatorname{tg} 72^\circ}{\operatorname{tg} 72^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ} \end{cases}$$

Logo,  $h \approx 143,8$ , ou seja, a largura do rio é aproximadamente de 143,8 metros.

$$\text{b) } \widehat{BPA} = 180^\circ - 72^\circ - 63^\circ = 45^\circ$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 72^\circ}{\overline{PA}} = \frac{\sin 45^\circ}{120} = \frac{\sin 63^\circ}{\overline{BP}}$$

Então:

$$\frac{\sin 72^\circ}{\overline{PA}} = \frac{\sin 45^\circ}{120} \Leftrightarrow \overline{PA} = \frac{120 \sin 72^\circ}{\sin 45^\circ},$$

peço que a distância entre a Ana e a pedra é aproximadamente de 161,4 metros.

Por outro lado:

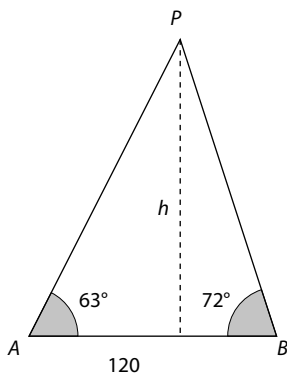
$$\frac{\sin 45^\circ}{120} = \frac{\sin 63^\circ}{\overline{BP}} \Leftrightarrow \overline{BP} = \frac{120 \sin 63^\circ}{\sin 45^\circ},$$

o que significa que a distância entre a Berta e a pedra é aproximadamente de 151,2 metros.

## Unidade 2 - Extensão da trigonometria a ângulos retos e obtusos e resolução de triângulos

Páginas 12 a 26

8.



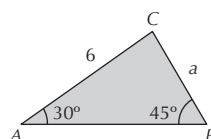
$$\text{a) } \begin{cases} \operatorname{tg} 63^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 72^\circ = \frac{h}{120 - x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \operatorname{tg} 63^\circ \\ h = 120 \operatorname{tg} 72^\circ - x \operatorname{tg} 72^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \operatorname{tg} 63^\circ = 120 \operatorname{tg} 72^\circ - x \operatorname{tg} 72^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \operatorname{tg} 72^\circ + x \operatorname{tg} 63^\circ = 120 \operatorname{tg} 72^\circ \end{cases}$$

9.



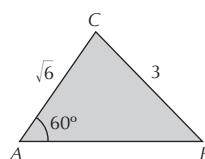
Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 30^\circ}{a} = \frac{\sin 45^\circ}{6} \Leftrightarrow a = \frac{6 \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{6 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow a = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{6\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = 3\sqrt{2}$$

10.



Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 60^\circ}{3} = \frac{\sin \widehat{ABC}}{\sqrt{6}} = \frac{\sin \widehat{BCA}}{\overline{AB}}$$

Então:

$$\frac{\sin 60^\circ}{3} = \frac{\sin \hat{ABC}}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \sin \hat{ABC} = \frac{\sqrt{6} \sin 60^\circ}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{ABC} = \frac{\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} \Leftrightarrow \sin \hat{ABC} = \frac{\sqrt{18}}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{ABC} = \frac{3\sqrt{2}}{6} \Leftrightarrow \sin \hat{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo,  $\hat{ABC} = 45^\circ$  e  $\hat{BCA} = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$ .

Assim:

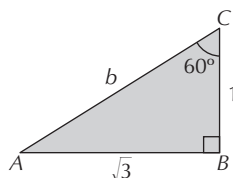
$$\frac{\sin \hat{ABC}}{\sqrt{6}} = \frac{\sin \hat{BCA}}{AB} \Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sin 75^\circ}{AB}$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{\sqrt{6} \sin 75^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow AB = \frac{2\sqrt{6} \sin 75^\circ}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow AB = 2\sqrt{3} \sin 75^\circ$$

Ou seja,  $AB \approx 3,35$ .

11.



Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 90^\circ}{b} = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow b = 2$$

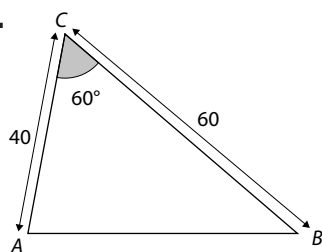
12.

a)  $\sin 120^\circ = \sin (180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b)  $\sin 135^\circ = \sin (180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c)  $\sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

13.



Pela Lei dos Cossenos:

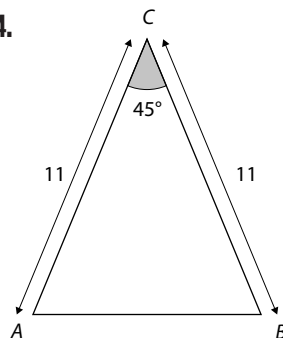
$$AB^2 = 40^2 + 60^2 - 2 \times 40 \times 60 \times \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 1600 + 3600 - 4800 \times \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 2800$$

Logo,  $AB = \sqrt{2800} = 20\sqrt{7}$ , ou seja, a distância entre os dois operários é de  $20\sqrt{7}$  metros.

14.



Pela Lei dos Cossenos:

$$AB^2 = 11^2 + 11^2 - 2 \times 11 \times 11 \times \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 121 + 121 - 242 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

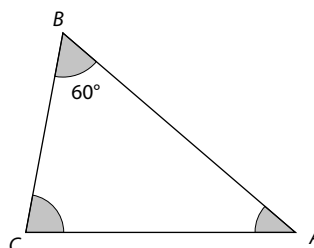
$$\Leftrightarrow AB^2 = 242 - 121\sqrt{2}$$

Logo,  $AB = \sqrt{242 - 121\sqrt{2}}$ .

Então, a área do círculo de raio  $AB$  é

$$\pi \times (\sqrt{242 - 121\sqrt{2}})^2 \approx 222,677 \text{ cm}^2.$$

15.



Pela Lei dos Cossenos:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = (2BC)^2 + BC^2 - 2 \times 2BC \times BC \times \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = 4BC^2 + BC^2 - 2BC^2$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = 3BC^2$$

Logo,  $AC = \sqrt{3} BC$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 60^\circ}{AC} = \frac{\sin \hat{CAB}}{BC} = \frac{\sin \hat{BCA}}{AB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3} BC} = \frac{\sin \hat{CAB}}{BC} = \frac{\sin \hat{BCA}}{2 BC}$$

Então:

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3} BC} = \frac{\sin \hat{CAB}}{BC}$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{CAB} = \frac{\sin 60^\circ \times BC}{\sqrt{3} BC}$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{CAB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin \hat{CAB} = \frac{1}{2}$$

Logo,  $\hat{CAB} = 30^\circ$ .

E:

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3} BC} = \frac{\sin \hat{BCA}}{2 \overline{BC}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{BCA} = \frac{\sin 60^\circ \times 2 \overline{BC}}{\sqrt{3} BC}$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{BCA} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin \hat{BCA} = 1$$

Logo,  $\hat{BCA} = 90^\circ$ .

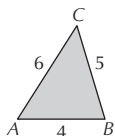
16.

a)  $\cos 120^\circ = \cos (180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

b)  $\cos 135^\circ = \cos (180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c)  $\cos 150^\circ = \cos (180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

17.



a) Pela Lei dos Cossenos:

$$6^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos \hat{ABC}$$

$$\Leftrightarrow 36 = 25 + 16 - 40 \cos \hat{ABC}$$

$$\Leftrightarrow 40 \cos \hat{ABC} = 5$$

$$\Leftrightarrow \cos \hat{ABC} = \frac{5}{40}$$

$$\text{Logo, } \hat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{5}{40}\right), \text{ pelo que } \hat{ABC} \approx 82,8^\circ.$$

Pela Lei dos Cossenos:

$$5^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \cos \hat{BAC}$$

$$\Leftrightarrow 25 = 36 + 16 - 48 \cos \hat{BAC}$$

$$\Leftrightarrow 48 \cos \hat{BAC} = 27$$

$$\Leftrightarrow \cos \hat{BAC} = \frac{27}{48}$$

$$\text{Logo, } \hat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{27}{48}\right), \text{ pelo que } \hat{BAC} \approx 55,8^\circ.$$

Pela lei dos Cossenos:

$$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos \hat{ACB}$$

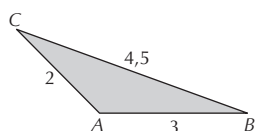
$$\Leftrightarrow 16 = 36 + 25 - 60 \cos \hat{ACB}$$

$$\Leftrightarrow 60 \cos \hat{ACB} = 45$$

$$\Leftrightarrow \cos \hat{ACB} = \frac{45}{60}$$

$$\text{Logo, } \hat{ACB} = \cos^{-1}\left(\frac{45}{60}\right), \text{ pelo que } \hat{ACB} \approx 41,4^\circ.$$

b)



Pela Lei dos Cossenos:

$$2^2 = 4,5^2 + 3^2 - 2 \times 4,5 \times 3 \times \cos \hat{ABC}$$

$$\Leftrightarrow 4 = 20,25 + 9 - 27 \cos \hat{ABC}$$

$$\Leftrightarrow 27 \cos \hat{ABC} = 25,25$$

$$\Leftrightarrow \cos \hat{ABC} = \frac{25,25}{27}$$

$$\text{Logo, } \hat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{25,25}{27}\right), \text{ pelo que } \hat{ABC} \approx 20,7^\circ.$$

Pela Lei dos Cossenos:

$$4,5^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos \hat{BAC}$$

$$\Leftrightarrow 20,25 = 4 + 9 - 12 \cos \hat{BAC}$$

$$\Leftrightarrow 12 \cos \hat{BAC} = -7,25$$

$$\Leftrightarrow \cos \hat{BAC} = -\frac{7,25}{12}$$

$$\text{Logo, } \hat{BAC} = \cos^{-1}\left(-\frac{7,25}{12}\right), \text{ pelo que } \hat{BAC} \approx 127,2^\circ.$$

Pela Lei dos Cossenos:

$$3^2 = 2^2 + 4,5^2 - 2 \times 2 \times 4,5 \times \cos \hat{ACB}$$

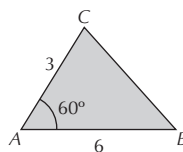
$$\Leftrightarrow 9 = 4 + 20,25 - 18 \cos \hat{ACB}$$

$$\Leftrightarrow 18 \cos \hat{ACB} = 15,25$$

$$\Leftrightarrow \cos \hat{ACB} = \frac{15,25}{18}$$

$$\text{Logo, } \hat{ACB} = \cos^{-1}\left(\frac{15,25}{18}\right), \text{ pelo que } \hat{ACB} \approx 32,1^\circ.$$

c)



Pela Lei dos Cossenos:

$$\overline{BC}^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 9 + 36 - 18$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 27$$

$$\text{Logo, } \overline{BC} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Pela lei dos Senos:

$$\frac{\sin 60^\circ}{3\sqrt{3}} = \frac{\sin \hat{ABC}}{3} = \frac{\sin \hat{ACB}}{6}$$

Então:

$$\frac{\sin 60^\circ}{3\sqrt{3}} = \frac{\sin \hat{ABC}}{3} \Leftrightarrow \sin \hat{ABC} = \frac{3 \sin 60^\circ}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{ABC} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin \hat{ABC} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } \hat{ABC} = 30^\circ.$$

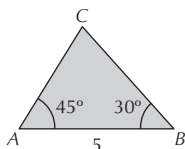
E:

$$\frac{\sin 60^\circ}{3\sqrt{3}} = \frac{\sin \hat{ACB}}{6} \Leftrightarrow \sin \hat{ACB} = \frac{6 \sin 60^\circ}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{ACB} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin \hat{ACB} = 1$$

$$\text{Logo, } \hat{ACB} = 90^\circ.$$

d)



$$\hat{ACB} = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 45^\circ}{BC} = \frac{\sin 30^\circ}{AC} = \frac{\sin 105^\circ}{5}$$

Então:

$$\frac{\sin 45^\circ}{BC} = \frac{\sin 105^\circ}{5} \Leftrightarrow BC = \frac{5 \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}$$

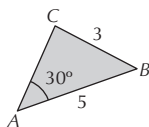
Logo,  $BC \approx 3,7$ .

E:

$$\frac{\sin 30^\circ}{AC} = \frac{\sin 105^\circ}{5} \Leftrightarrow AC = \frac{5 \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ}$$

Logo,  $AC \approx 2,6$ .

e)



Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 30^\circ}{3} = \frac{\sin \hat{ACB}}{5} \Leftrightarrow \sin \hat{ACB} = \frac{5 \sin 30^\circ}{3}$$

$$\text{Então, } \hat{ACB} = \sin^{-1}\left(\frac{5 \sin 30^\circ}{3}\right).$$

Logo,  $\hat{ACB} \approx 56,4^\circ$ .

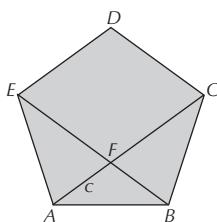
$$\hat{ABC} \approx 180^\circ - 30^\circ - 56,4^\circ \approx 93,6^\circ$$

Pela Lei dos Cossenos:

$$AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \cos \hat{ABC}$$

$$\text{Pelo que, } AC^2 \approx 34 - 24 \cos 93,6^\circ, \text{ ou seja, } AC \approx \sqrt{34 - 24 \cos 93,6^\circ} \approx 6.$$

18.



$$\hat{ABC} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$$

$$\hat{CAB} = \hat{BCA} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ = \hat{ABF}$$

Pela lei dos Cossenos:

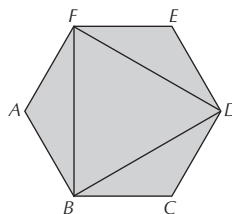
$$c^2 = 3^2 + c^2 - 2 \times 3 \times c \cos 36^\circ$$

$$\Leftrightarrow 9 = 6c \cos 36^\circ$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{9}{6 \cos 36^\circ}$$

Logo,  $c \approx 1,9$ .

19.



$$\hat{FAB} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 120^\circ$$

Seja  $x = \overline{FB}$ .

Pela Lei dos Cossenos:

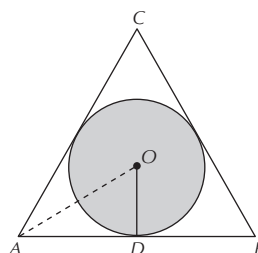
$$x^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 3 \cos 120^\circ$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 + 9 + 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 27$$

Então,  $x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$  e, portanto, o perímetro do triângulo  $[BDF]$  é  $3 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ .

20.



$$\hat{BAC} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$\hat{OAD} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\hat{DOA} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\overline{AD} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{\sin 30^\circ}{OD} \Leftrightarrow OD = \frac{\sqrt{3} \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$\Leftrightarrow OD = \frac{\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow OD = 1$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2, \text{ logo } A_{\text{círculo}} = \pi \times 1^2 = \pi.$$

## Unidade 3 - Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações

Páginas 27 a 31

21.

a)

i) /      ii) D      iii) H      iv) /

b) Por exemplo,  $160^\circ$  ou  $-200^\circ$ .

22.

a) I      b) C      c) C      d) G      e) F

23.

- a)  $400^\circ = 40^\circ + 1 \times 360^\circ$   
 b)  $-1280^\circ = -200^\circ - 3 \times 360^\circ$   
 c)  $670^\circ = 310^\circ + 1 \times 360^\circ$   
 d)  $-825^\circ = -105^\circ - 2 \times 360^\circ$

24.

- a)  $25^\circ + 3 \times 360^\circ = 1105^\circ$   
 b)  $180^\circ + 1 \times 360^\circ = 540^\circ$   
 c)  $-39^\circ - 1 \times 360^\circ = -399^\circ$   
 d)  $-100^\circ - 4 \times 360^\circ = -1540^\circ$

25.

- a) Ponto B.  
 b) Ponto D.  
 c) Ponto D.  
 d) Ponto C.

## Unidade 4 - Razões trigonométricas de ângulos generalizados

Páginas 32 a 65

26.

- a)  $85^\circ$  pertence ao 1.º quadrante.  
 b)  $280^\circ$  pertence ao 4.º quadrante.  
 c)  $-25^\circ$  pertence ao 4.º quadrante.  
 d)  $200^\circ$  pertence ao 3.º quadrante.  
 e)  $400^\circ = 40^\circ + 1 \times 360^\circ$  pertence ao 1.º quadrante.  
 f)  $-1280^\circ = -200^\circ - 3 \times 360^\circ$  pertence ao 2.º quadrante.  
 g)  $670^\circ = 310^\circ + 1 \times 360^\circ$  pertence ao 4.º quadrante.  
 h)  $-825^\circ = -105^\circ - 2 \times 360^\circ$  pertence ao 3.º quadrante.

27.

a) Abcissa de P:

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{5} \Leftrightarrow x = 5 \cos 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Ordenada de P:

$$\sin 30^\circ = \frac{y}{5} \Leftrightarrow y = 5 \sin 30^\circ \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}$$

$$\text{Logo, } P\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

b) Abcissa de P:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cos \alpha$$

Ordenada de P:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \sin \alpha$$

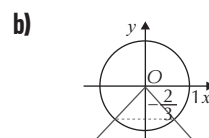
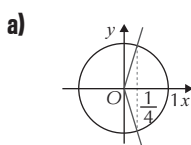
Logo,  $P(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ .

28.

a)  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ ;  $\sin \alpha = \frac{3}{4}$

b)  $\cos \beta = \frac{3}{5}$ ;  $\sin \beta = -\frac{4}{5}$

29.



30. Ordenada de P:  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$$

Uma vez que  $\alpha$  é um ângulo do 2.º quadrante, tem-

$$\text{-se que } \cos \alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}.$$

31.

a)  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq 4 \cos \alpha \leq 4$

Valor mínimo: -4      Valor máximo: 4

b)  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq \sin \alpha - 3 \leq -2$

Valor mínimo: -4      Valor máximo: -2

c)  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin \alpha \leq 2$

$$\Leftrightarrow 2 \geq -2 \sin \alpha \geq -2 \Leftrightarrow 7 \geq 5 - 2 \sin \alpha \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{3} \geq \frac{5 - 2 \sin \alpha}{3} \geq 1$$

Valor mínimo: 1      Valor máximo:  $\frac{7}{3}$

d)  $0 \leq \cos^2 \alpha \leq 1$

Valor mínimo: 0      Valor máximo: 1

e)  $0 \leq \cos^2 \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \cos^2 \alpha + 1 \leq 2$

Valor mínimo: 1      Valor máximo: 2

f)  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \cos \alpha + 1 \leq 2$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (\cos \alpha + 1)^2 \leq 4$$

Valor mínimo: 0      Valor máximo: 4

32.

a) Afirmação falsa. No 2.º quadrante o seno é positivo e o cosseno é negativo, logo não têm o mesmo sinal.

b) Afirmação verdadeira.



- c) Afirmação verdadeira.  
d) Afirmação falsa. Não existe qualquer ângulo cujo cosseno seja superior a 1.  
e) Afirmação falsa. No 2.º quadrante o seno é positivo.  
f) Afirmação falsa.

$$\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(-\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{1}{49} + \frac{36}{49} = \frac{37}{49} \neq 1$$

33.

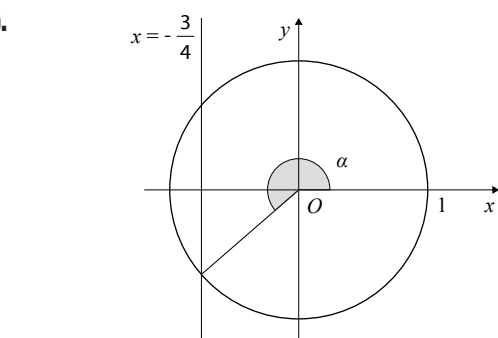
- a) Afirmação verdadeira.  
b) Afirmação verdadeira.  
c) Afirmação falsa. No 3.º quadrante o cosseno é crescente.  
d) Afirmação falsa. Não existe qualquer ângulo cujo cosseno seja superior a 1.  
e) Afirmação verdadeira.  
f) Afirmação falsa.

$$\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(-\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{1}{49} + \frac{36}{49} = \frac{37}{49} \neq 1$$

34.

- a)  $\sin 50^\circ < \sin 80^\circ$   
b)  $\cos 50^\circ > \cos 80^\circ$   
c)  $\cos 105^\circ > \cos 162^\circ$   
d)  $\sin 200^\circ < \sin 90^\circ$   
e)  $\cos 180^\circ < \sin 5^\circ$   
f)  $\cos(-90^\circ) = \sin 180^\circ$

35.



$$\sin^2 \alpha + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{7}{16}$$

Uma vez que  $\alpha$  pertence ao 3.º quadrante, tem-se:

$$\sin \alpha = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

36.

- a) O produto do seno pelo cosseno é positivo nos 1.º e 3.º quadrantes.  
b) O seno é crescente e o cosseno é decrescente no 1.º quadrante.

- c) O seno e o cosseno são crescentes no 4.º quadrante.  
d) O seno é decrescente e o cosseno é negativo nos 2.º e 3.º quadrantes.

37.

$$\begin{aligned} \text{a) } -1 \leq \sin x \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-3k}{2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq 1-3k \leq 2 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq -3k \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 3 \geq 3k \geq -1 \\ &\Leftrightarrow 1 \geq k \geq -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } k \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right].$$

b)  $x \in ]180^\circ, 270^\circ[$ , então:

$$\begin{aligned} -1 < \cos x < 0 &\Leftrightarrow -4 < 4 \cos x < 0 \\ &\Leftrightarrow -4 < \frac{k-10}{2} < 0 \\ &\Leftrightarrow -8 < k-10 < 0 \\ &\Leftrightarrow 2 < k < 10 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } k \in ]2, 10[.$$

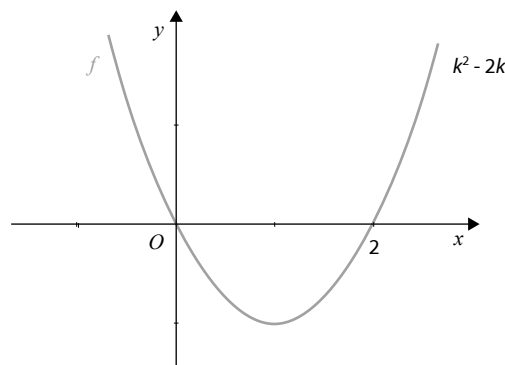
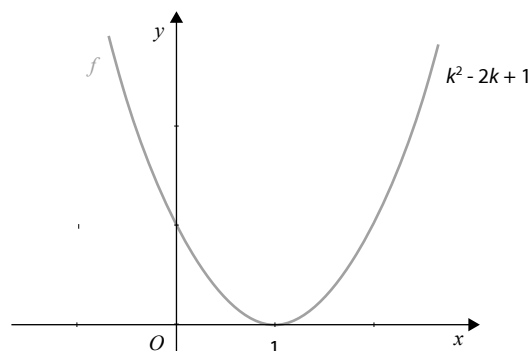
c)  $x \in [0^\circ, 90^\circ[$ , então:

$$\begin{aligned} 0 < \cos x \leq 1 &\Leftrightarrow 0 < k^2 - 2k + 1 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 > 0 \wedge k^2 - 2k + 1 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 > 0 \wedge k^2 - 2k \leq 0 \end{aligned}$$

**Cálculos auxiliares**

$$k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k-1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

$$k^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow k(k-2) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = 2$$



$$\text{Logo, } k \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \cap [0, 2] = [0, 1[ \cup ]1, 2].$$

38.

$$a) \sin \theta = \frac{\frac{1}{2} \overline{BD}}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \overline{BD} = a \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = 2a \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\frac{1}{2} \overline{AC}}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \overline{AC} = a \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 2a \cos \theta$$

Assim, a área da peça é dada por:

$$\frac{2a \sin \theta \times 2a \cos \theta}{2} = 2a^2 \sin \theta \cos \theta = A(\theta)$$

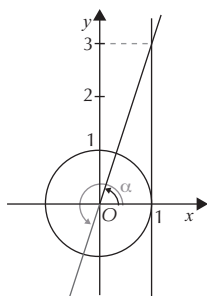
Se  $\theta \leq 0^\circ$  ou se  $\theta \geq 90^\circ$ , a figura não é um losango, pelo que  $\theta \in ]0^\circ, 90^\circ[$ .

$$b) A(45^\circ) = 2 \times 3^2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ = 18 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 9$$

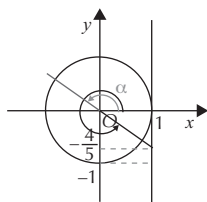
Quando  $\theta = 45^\circ$  e  $a = 3$ , o losango  $[ABCD]$  adquire a forma de um quadrado de lado 3.

39.

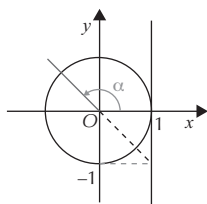
a)



b)



c)



40.

$$a) \operatorname{tg}^2 \alpha \in [0, +\infty[.$$

$$b) \text{ Uma vez que } \operatorname{tg}^2 \alpha \in [0, +\infty[, \text{ então } \operatorname{tg}^2 \alpha + 3 \in [3, +\infty[.$$

$$c) \operatorname{tg} \alpha \in ]-\infty, +\infty[, \text{ logo } \operatorname{tg} \alpha + 3 \in ]-\infty, +\infty[.$$

$$d) \text{ Uma vez que } \operatorname{tg}^2 \alpha \in [0, +\infty[, \text{ então } 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \in [0, +\infty[ \text{ e, portanto, } 2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1 \in [-1, +\infty[.$$

$$e) \text{ Uma vez que } \operatorname{tg}^2 \alpha \in [0, +\infty[, \text{ então } -\operatorname{tg}^2 \alpha \in ]-\infty, 0], \text{ logo } 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \in ]-\infty, 1] \text{ e, portanto, } \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2} \in \left] -\infty, \frac{1}{2} \right].$$

41.

a) A tangente é negativa e o cosseno é positivo no 4.º quadrante.

b) O seno e a tangente são negativos no 4.º quadrante.

c) Não há nenhum quadrante em que a tangente seja decrescente.

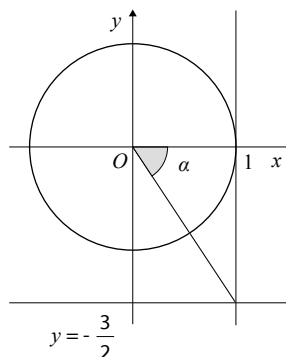
d) A tangente e o cosseno têm o mesmo sinal nos 1.º e 2.º quadrantes.

e) O seno é maior que a tangente em todos os ângulos do 2.º e do 4.º quadrantes.

42. Se o seno e o cosseno forem ambos positivos, então  $\operatorname{tg} \alpha > 1$  se  $\sin \alpha > \cos \alpha$ .

Se o seno e o cosseno forem ambos negativos, então  $\operatorname{tg} \alpha > 1$  se  $|\sin \alpha| > |\cos \alpha|$ .

43.



$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{9}{4} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{13}{4} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{13}$$

Uma vez que  $\alpha$  pertence ao 4.º quadrante, tem-se que:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \frac{4}{13} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{13} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{9}{13}$$

Como  $\alpha$  pertence ao 4.º quadrante, tem-se que:

$$\sin \alpha = -\sqrt{\frac{9}{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

44.

$$\begin{aligned} a) & (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \\ & = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \\ & - (\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = \\ & = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - (1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha) = \\ & = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \\ & = 4 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$b) \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha = \sin \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \sin \alpha \times 1 = \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} &= \frac{1 + 2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= 1 + \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 + \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \\ &= 1 + 2 \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \\ &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \frac{\cos \alpha - \frac{1}{\cos \alpha}}{\sin \alpha - \frac{1}{\sin \alpha}} &= \frac{\frac{\cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha - 1}{\sin \alpha}} = \\ &= \frac{-\sin^2 \alpha \times \sin \alpha}{-\cos^2 \alpha \times \cos \alpha} = \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} = \operatorname{tg}^3 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad \frac{\cos \alpha - \frac{1}{\sin \alpha}}{\sin \alpha - \frac{1}{\cos \alpha}} &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \alpha - 1}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha \cos \alpha - 1}{\cos \alpha}} = \\ &= \frac{(\sin \alpha \cos \alpha - 1) \cos \alpha}{(\sin \alpha \cos \alpha - 1) \sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \\ &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \end{aligned}$$

45.

$$\text{a)} \quad \sin (380^\circ) = \sin (360^\circ + 20^\circ) = \sin (20^\circ)$$

$$\text{b)} \quad \cos (1205^\circ) = \cos (3 \times 360^\circ + 125^\circ) = \cos (125^\circ)$$

$$\text{c)} \quad \operatorname{tg} (-940^\circ) = \operatorname{tg} (-2 \times 360^\circ - 220^\circ) = \operatorname{tg} (-220^\circ)$$

46.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \sin (780^\circ) &= \sin (2 \times 360^\circ + 60^\circ) = \\ &= \sin (60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\cos (780^\circ) = \cos (2 \times 360^\circ + 60^\circ) = \cos (60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} (780^\circ) = \operatorname{tg} (2 \times 360^\circ + 60^\circ) = \operatorname{tg} (60^\circ) = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \sin (1125^\circ) &= \sin (3 \times 360^\circ + 45^\circ) = \\ &= \sin (45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos (1125^\circ) &= \cos (3 \times 360^\circ + 45^\circ) = \\ &= \cos (45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} (1125^\circ) = \operatorname{tg} (3 \times 360^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} (45^\circ) = 1$$

$$\text{c)} \quad \sin (1110^\circ) = \sin (3 \times 360^\circ + 30^\circ) = \sin (30^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\cos (1110^\circ) = \cos (3 \times 360^\circ + 30^\circ) = \cos (30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} (1110^\circ) = \operatorname{tg} (3 \times 360^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tg} (30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

47.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \cos (450^\circ) + 2 \sin (765^\circ) - \operatorname{tg} (720^\circ) &= \\ &= \cos (360^\circ + 90^\circ) + 2 \sin (2 \times 360^\circ + 45^\circ) - \\ &- \operatorname{tg} (2 \times 360^\circ) = \\ &= \cos (90^\circ) + 2 \sin (45^\circ) - \operatorname{tg} (0^\circ) = \\ &= 0 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \cos^2 (361^\circ) - \operatorname{tg} (405^\circ) + \sin^2 (721^\circ) &= \\ &= \cos^2 (360^\circ + 1^\circ) - \operatorname{tg} (360^\circ + 45^\circ) + \\ &+ \sin^2 (2 \times 360^\circ + 1^\circ) = \\ &= \cos^2 (1^\circ) - \operatorname{tg} (45^\circ) + \sin^2 (1^\circ) = \\ &= 1 - 1 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

48.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \sin (-30^\circ) + \cos (-60^\circ) + \operatorname{tg} (-45^\circ) &= \\ &= -\sin (30^\circ) + \cos (60^\circ) - \operatorname{tg} (45^\circ) = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \sin (-780^\circ) - \cos (-1470^\circ) - \operatorname{tg} (-420^\circ) &= \\ &= -\sin (780^\circ) - \cos (1470^\circ) + \operatorname{tg} (420^\circ) = \\ &= -\sin (2 \times 360^\circ + 60^\circ) - \cos (4 \times 360^\circ + 30^\circ) + \\ &+ \operatorname{tg} (360^\circ + 60^\circ) = \\ &= -\sin (60^\circ) - \cos (30^\circ) + \operatorname{tg} (60^\circ) = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

49.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \sin (150^\circ) + \cos (120^\circ) + \operatorname{tg} (135^\circ) &= \\ &= \sin (180^\circ - 30^\circ) + \cos (180^\circ - 60^\circ) + \operatorname{tg} (180^\circ - 45^\circ) = \\ &= \sin (30^\circ) - \cos (60^\circ) - \operatorname{tg} (45^\circ) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \sin (840^\circ) - \cos (510^\circ) - \operatorname{tg} (1215^\circ) &= \\ &= \sin (2 \times 360^\circ + 120^\circ) - \cos (360^\circ + 150^\circ) - \\ &- \operatorname{tg} (3 \times 360^\circ + 135^\circ) = \\ &= \sin (120^\circ) - \cos (150^\circ) - \operatorname{tg} (135^\circ) = \\ &= \sin (180^\circ - 60^\circ) - \cos (180^\circ - 30^\circ) - \operatorname{tg} (180^\circ - 45^\circ) = \\ &= \sin (60^\circ) + \cos (30^\circ) + \operatorname{tg} (45^\circ) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

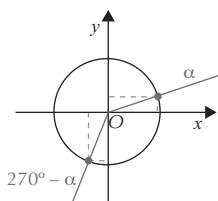
50.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & 2 \operatorname{sen}(210^\circ) + 4 \cos(240^\circ) + \operatorname{tg}(600^\circ) = \\
 & = 2 \operatorname{sen}(180^\circ + 30^\circ) + 4 \cos(180^\circ + 60^\circ) + \\
 & + \operatorname{tg}(360^\circ + 180^\circ + 60^\circ) = \\
 & = -2 \operatorname{sen}(30^\circ) - 4 \cos(60^\circ) + \operatorname{tg}(60^\circ) = \\
 & = -2 \times \frac{1}{2} - 4 \times \frac{1}{2} + \sqrt{3} = \\
 & = -1 - 2 + \sqrt{3} = \\
 & = -3 + \sqrt{3} \\
 \text{b)} \quad & -2 \operatorname{sen}(600^\circ) - \cos(225^\circ) - 3 \operatorname{tg}(930^\circ) = \\
 & = -2 \operatorname{sen}(360^\circ + 240^\circ) - \cos(180^\circ + 45^\circ) - \\
 & - 3 \operatorname{tg}(2 \times 360^\circ + 210^\circ) = \\
 & = -2 \operatorname{sen}(180^\circ + 60^\circ) + \cos(45^\circ) - 3 \operatorname{tg}(180^\circ + 30^\circ) = \\
 & = 2 \operatorname{sen}(60^\circ) + \cos(45^\circ) - 3 \operatorname{tg}(30^\circ) = \\
 & = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \\
 & = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} = \\
 & = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

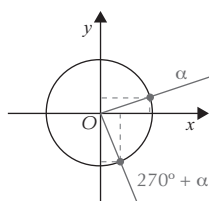
51.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \\
 & = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \\
 \text{b)} \quad & \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha)}{\cos(90^\circ + \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\operatorname{sen} \alpha} = \\
 & = -\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}
 \end{aligned}$$

52.



$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(270^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\
 \cos(270^\circ - \alpha) &= -\operatorname{sen} \alpha \\
 \operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) &= \frac{\operatorname{sen}(270^\circ - \alpha)}{\cos(270^\circ - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{-\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}
 \end{aligned}$$



$$\operatorname{sen}(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(270^\circ + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(270^\circ + \alpha)}{\cos(270^\circ + \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

53.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) - \cos(720^\circ - \alpha) + \\
 & + \operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}(-\alpha) = \\
 & = -\operatorname{sen} \alpha - \cos(-\alpha) + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \\
 & = -\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \\
 & = -\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{tg} \alpha \\
 \text{b)} \quad & -\operatorname{tg}(1080^\circ + \beta) - \cos(180^\circ - \beta) + \\
 & + \operatorname{sen}(270^\circ + \beta) - \operatorname{sen}(360^\circ - \beta) = \\
 & = -\operatorname{tg} \beta + \cos \beta - \operatorname{sen}(90^\circ + \beta) - \operatorname{sen}(-\beta) = \\
 & = -\operatorname{tg} \beta + \cos \beta - \cos \beta + \operatorname{sen} \beta = \\
 & = -\operatorname{tg} \beta + \operatorname{sen} \beta \\
 \text{c)} \quad & -2 \cos(450^\circ + \gamma) - 3 \operatorname{tg}(540^\circ + \gamma) - \\
 & - \cos(\gamma - 180^\circ) - 3 \operatorname{sen}(-\gamma - 270^\circ) = \\
 & = -2 \cos(90^\circ + \gamma) - 3 \operatorname{tg}(180^\circ + \gamma) - \\
 & - \cos(180^\circ - \gamma) + 3 \operatorname{sen}(270^\circ + \gamma) = \\
 & = 2 \operatorname{sen} \gamma - 3 \operatorname{tg} \gamma + \cos \gamma - 3 \operatorname{sen}(90^\circ + \gamma) = \\
 & = 2 \operatorname{sen} \gamma - 3 \operatorname{tg} \gamma + \cos \gamma - 3 \cos \gamma = \\
 & = 2 \operatorname{sen} \gamma - 3 \operatorname{tg} \gamma - 2 \cos \gamma \\
 \text{d)} \quad & 2 \operatorname{sen}(-270^\circ + \delta) - 3 \operatorname{sen}(\delta - 90^\circ) + \\
 & + 5 \cos(-180^\circ - \delta) + 2 \operatorname{tg}(-360^\circ + \delta) = \\
 & = 2 \operatorname{sen}(90^\circ + \delta) + 3 \operatorname{sen}(90^\circ - \delta) + \\
 & + 5 \cos(180^\circ + \delta) + 2 \operatorname{tg} \delta = \\
 & = 2 \cos \delta + 3 \cos \delta - 5 \cos \delta + 2 \operatorname{tg} \delta = \\
 & = 2 \operatorname{tg} \delta \\
 \text{e)} \quad & \frac{\operatorname{sen}(-180^\circ - \epsilon) - \cos(270^\circ - \epsilon)}{\operatorname{sen}(90^\circ - \epsilon) - 2 \cos(180^\circ + \epsilon)} + \frac{2}{3} \operatorname{tg}(\epsilon + 180^\circ) = \\
 & = \frac{-\operatorname{sen}(180^\circ + \epsilon) + \cos(90^\circ - \epsilon)}{\cos \epsilon + 2 \cos \epsilon} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} \epsilon = \\
 & = \frac{\operatorname{sen} \epsilon + \operatorname{sen} \epsilon}{3 \cos \epsilon} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} \epsilon = \\
 & = \frac{2 \operatorname{sen} \epsilon}{3 \cos \epsilon} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} \epsilon = \\
 & = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \epsilon + \frac{2}{3} \operatorname{tg} \epsilon = \\
 & = \frac{4}{3} \operatorname{tg} \epsilon
 \end{aligned}$$

$$54. \operatorname{tg}(-\alpha) \times \operatorname{sen}(-90^\circ + \alpha) < 0$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{tg} \alpha \times (-\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \times \cos \alpha < 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha < 0$$

Logo, a opção correta é a (B).

$$55. \cos(-90^\circ - \alpha) = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos(90^\circ + \alpha) = -\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow -\sin \alpha = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

Como  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  e  $\alpha \in ]90^\circ, 270^\circ[$ , então  $\alpha$  pertence ao 2.º quadrante.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

Uma vez que  $\alpha$  pertence ao 2.º quadrante, então

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

Então:

$$\sin(180^\circ - \alpha) \times \cos(180^\circ - \alpha) + \sin^2(-\alpha) - \operatorname{tg}(\alpha - 180^\circ) =$$

$$= \sin \alpha \times (-\cos \alpha) + \sin^2 \alpha + \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) =$$

$$= -\sin \alpha \times \cos \alpha + \sin^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= -\frac{3}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{12}{25} + \frac{9}{25} + \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{159}{100}$$

56. Uma vez que  $\operatorname{tg} x > 0$  e que  $x \in ]-180^\circ, 0^\circ[$ , então  $x$  pertence ao 3.º quadrante.

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{2}{3}$$

Como  $x$  pertence ao 3.º quadrante, então

$$\cos x = -\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3}$$

Como  $x$  pertence ao 3.º quadrante, então

$$\sin x = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Então:

$$\sin^2(180^\circ + x) - 3 \sin(90^\circ + x) + \cos(270^\circ + x) + \sin^2(90^\circ - x) =$$

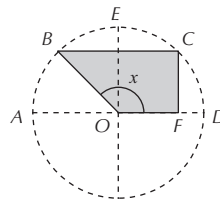
$$= \sin^2 x - 3 \cos x - \cos(90^\circ + x) + \cos^2 x =$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x - 3 \cos x + \sin x =$$

$$= \frac{1}{3} - 3 \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{2}{3} =$$

$$= 1 + \sqrt{6} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

57.



$$\overline{OF} = -2 \cos x$$

$$\overline{FC} = 2 \sin x$$

$$\overline{BC} = -4 \cos x$$

A área do trapézio  $[OBCF]$  é dada por:

$$\frac{\overline{BC} + \overline{OF}}{2} \times \overline{FC} = \frac{-4 \cos x - 2 \cos x}{2} \times 2 \sin x =$$

$$= -6 \cos x \sin x$$

58.

a) Sendo o comprimento do arco igual ao raio, então a amplitude do arco correspondente é 1 radiano.

$$b) \frac{1 \text{ rad}}{x \text{ rad}} = \frac{2 \text{ cm}}{4 \text{ cm}}, \text{ logo a amplitude do arco é:}$$

$$\frac{4 \times 1}{2} = 2 \text{ rad}$$

$$c) \frac{1 \text{ rad}}{x \text{ rad}} = \frac{2 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}, \text{ logo a amplitude do arco é:}$$

$$\frac{1 \times 1}{2} = 0,5 \text{ rad}$$

$$d) \frac{1 \text{ rad}}{x \text{ rad}} = \frac{2 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}}, \text{ logo a amplitude do arco é:}$$

$$\frac{0,5 \times 1}{2} = 0,25 \text{ rad}$$

59.

$$a) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{120^\circ}{x \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{120\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

Logo,  $\frac{2\pi}{3}$  é a medida em radianos da amplitude de um ângulo de  $120^\circ$ .

$$b) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{135^\circ}{x \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{135\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

Logo,  $\frac{3\pi}{4}$  é a medida em radianos da amplitude de um ângulo de  $135^\circ$ .

$$c) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{150^\circ}{x \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{150\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6}.$$

Logo,  $\frac{5\pi}{6}$  é a medida em radianos da amplitude de um ângulo de  $150^\circ$ .

$$d) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{200^\circ}{x \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{200\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{10\pi}{9}.$$

Logo,  $\frac{10\pi}{9}$  é a medida em radianos da amplitude de um ângulo de  $200^\circ$ .

$$e) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{-70^\circ}{x \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{-70\pi}{180} \Leftrightarrow x = -\frac{7\pi}{18}.$$

Logo,  $-\frac{7\pi}{18}$  é a medida em radianos da amplitude de um ângulo de  $-70^\circ$ .

60.

$$a) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{\frac{2\pi}{3} \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times \frac{2\pi}{3}}{\pi} \Leftrightarrow x = 120.$$

Logo, 120 é a medida em graus da amplitude de um ângulo de  $\frac{2\pi}{3}$  radianos.

$$b) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{-\frac{5\pi}{3} \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times \left(-\frac{5\pi}{3}\right)}{\pi} \Leftrightarrow x = -300.$$

Logo, -300 é a medida em graus da amplitude de um ângulo de  $-\frac{5\pi}{3}$  radianos.

$$c) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{\frac{7\pi}{6} \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times \frac{7\pi}{6}}{\pi} \Leftrightarrow x = 210.$$

Logo, 210 é a medida em graus da amplitude de um ângulo de  $\frac{7\pi}{6}$  radianos.

$$d) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{\frac{3\pi}{4} \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times \frac{3\pi}{4}}{\pi} \Leftrightarrow x = 135.$$

Logo, 135 é a medida em graus da amplitude de um ângulo de  $\frac{3\pi}{4}$  radianos.

$$e) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{-\frac{5\pi}{4} \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times \left(-\frac{5\pi}{4}\right)}{\pi} \Leftrightarrow x = -225.$$

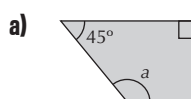
Logo, -225 é a medida em graus da amplitude de um ângulo de  $-\frac{5\pi}{4}$  radianos.

$$f) \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{1 \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times 1}{\pi} \Leftrightarrow x \approx 57,3.$$

Logo, 57,3 é a medida aproximada em graus da amplitude de um ângulo de 1 radiano.

61.

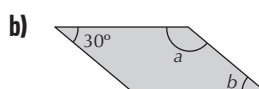


$$a = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{135^\circ}{a \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } a = \frac{135\pi}{180} \Leftrightarrow a = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{Logo, } a = \frac{3\pi}{4} \text{ rad.}$$



$$a = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{150^\circ}{a \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } a = \frac{150\pi}{180} \Leftrightarrow a = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{Logo, } a = \frac{5\pi}{6} \text{ rad.}$$

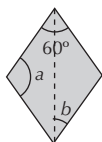
$$b = 30^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{30^\circ}{b \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } b = \frac{30\pi}{180} \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Logo, } b = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

c)



$$a = \frac{360^\circ - 60^\circ - 60^\circ}{2} = 120^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{120^\circ}{a \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } a = \frac{120\pi}{180} \Leftrightarrow a = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Logo, } a = \frac{2\pi}{3} \text{ rad.}$$

$$b = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{30^\circ}{b \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } b = \frac{30\pi}{180} \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Logo, } b = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

62.

$$\text{a) } \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{1 \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times 1}{\pi} \approx 57,2958.$$

$$\frac{1^\circ}{60'} = \frac{0,2958^\circ}{y'}$$

$$\text{Então, } y = \frac{0,2958 \times 60}{1} = 17,748.$$

$$\frac{1'}{60''} = \frac{0,748'}{z''}$$

$$\text{Então, } z = \frac{0,748 \times 60}{1} \approx 45.$$

Logo, 1 radiano corresponde aproximadamente a  $57^\circ 17' 45''$ .

$$\text{b) } \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{\frac{\pi}{11} \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times \frac{\pi}{11}}{\pi} \approx 16,3636.$$

$$\frac{1^\circ}{60'} = \frac{0,3636^\circ}{y'}$$

$$\text{Então, } y = \frac{0,3636 \times 60}{1} = 21,816.$$

$$\frac{1'}{60''} = \frac{0,816'}{z''}$$

$$\text{Então, } z = \frac{0,816 \times 60}{1} \approx 49.$$

Logo,  $\frac{\pi}{11}$  radianos correspondem aproximadamente a  $16^\circ 21' 49''$ .

$$\text{c) } \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{\frac{6\pi}{7} \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times \frac{6\pi}{7}}{\pi} \approx 154,2857.$$

$$\frac{1^\circ}{60'} = \frac{0,2857^\circ}{y'}$$

$$\text{Então, } y = \frac{0,2857 \times 60}{1} = 17,142.$$

$$\frac{1'}{60''} = \frac{0,142'}{z''}$$

$$\text{Então, } z = \frac{0,142 \times 60}{1} \approx 9.$$

Logo,  $\frac{6\pi}{7}$  radianos correspondem aproximadamente a  $154^\circ 17' 9''$ .

$$\text{d) } \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{10,4 \text{ rad}}$$

$$\text{Então, } x = \frac{180 \times 10,4}{\pi} \approx 595,8761.$$

$$\frac{1^\circ}{60'} = \frac{0,8761^\circ}{y'}$$

$$\text{Então, } y = \frac{0,8761 \times 60}{1} = 52,566.$$

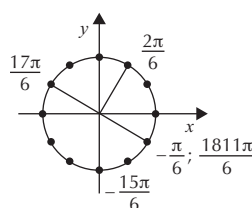
$$\frac{1'}{60''} = \frac{0,566'}{z''}$$

$$\text{Então, } z = \frac{0,566 \times 60}{1} \approx 34.$$

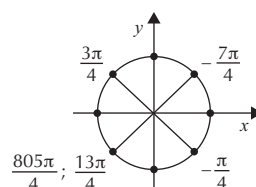
Logo, 10,4 radianos correspondem aproximadamente a  $595^\circ 52' 34''$ .

63.

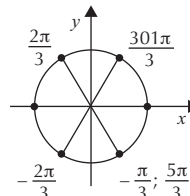
a)



b)



c)



64.

a)  $13\pi = 6 \times 2\pi + \pi$        $-13\pi = -6 \times 2\pi - \pi$   
 Ora,  $\pi$  e  $-\pi$  correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade, logo  $13\pi$  e  $-13\pi$  correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

b)  $2016\pi = 1013 \times 2\pi$   
 Ora,  $0$  e  $2\pi$  correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade, logo  $0$  e  $2016\pi$  correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

c)  $\frac{7\pi}{2} = 2\pi + \frac{3\pi}{2}$   
 Ora,  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3\pi}{2}$  não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade, logo  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{7\pi}{2}$  não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

d)  $\frac{32\pi}{3} = 5 \times 2\pi + \frac{2\pi}{3}$        $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3}$   
 Logo,  $-\frac{4\pi}{3}$  e  $\frac{32\pi}{3}$  correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

e)  $-\frac{15\pi}{4} + 2 \times 2\pi = \frac{\pi}{4}$        $-\frac{109\pi}{4} + 14 \times 2\pi = \frac{3\pi}{4}$   
 Logo,  $-\frac{15\pi}{4}$  e  $-\frac{109\pi}{4}$  não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

f)  $\frac{25\pi}{6} - 2 \times 2\pi = \frac{\pi}{6}$        $\frac{2018\pi}{6} - 168 \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$   
 Logo,  $\frac{25\pi}{6}$  e  $\frac{2018\pi}{6}$  não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

65.  $\frac{2\pi}{18} = \frac{2 \times 0,5 \times \pi}{x} \Leftrightarrow x = \frac{18\pi}{2\pi} \Leftrightarrow x = 9$

A distância percorrida foi de 9 metros.

66.  $\frac{2\pi}{x} = \frac{2 \times 5 \times \pi}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi \times \frac{\pi}{2}}{10\pi} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10}$   
 A amplitude do arco  $AB$  é  $\frac{\pi}{10}$  radianos.

67.  $\frac{2\pi}{5} = \frac{6^2\pi}{x} \Leftrightarrow x = \frac{5 \times 36\pi}{2\pi} \Leftrightarrow x = 90$   
 A área do setor circular é  $90 \text{ cm}^2$ .

68.  $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2\pi}{4\pi} \Leftrightarrow 4 = \frac{r^2}{4} \Leftrightarrow r^2 = 16$   
 Logo,  $r = \sqrt{16} = 4$ .  
 O raio do setor circular é 4 cm.

69.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2r\pi}{\pi} \\ \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{r^2\pi}{\pi} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{\alpha} = 4r \\ \frac{2\pi}{\alpha} = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 4r \\ \text{---} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 - 4r = 0 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(r - 4) = 0 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \vee r = 4 \\ \text{impossível} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r = 4 \\ \frac{2\pi}{\alpha} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \alpha = \frac{2\pi}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 4 \\ \alpha = \frac{\pi}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

O raio da circunferência é 4 cm e a amplitude do arco é  $\frac{\pi}{8}$  radianos.

70.

a)  $-2 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) - \text{tg}\left(\frac{28\pi}{3}\right) =$   
 $= -2 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \text{tg}\left(9\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$   
 $= 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) =$   
 $= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b)  $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) =$   
 $= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$   
 $= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$   
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} =$   
 $= 0$

c)  $\cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) + \text{tg}\left(\frac{11\pi}{4}\right) =$   
 $= \cos\left(7\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \text{tg}\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$   
 $= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$   
 $= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$   
 $= -\frac{1}{2} - 1 =$   
 $= -\frac{3}{2}$

d)  $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) - 3 \text{tg}\left(\frac{11\pi}{6}\right) =$   
 $= -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3 \text{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$



$$\begin{aligned}
&= -\operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 3 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\
&= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 3 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \\
&= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e)} \operatorname{sen}\left(\frac{17\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{19\pi}{6}\right) &= \\
&= \operatorname{sen}\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \\
&= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \\
&= \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

71.

$$\begin{aligned}
\text{a)} 2 \operatorname{sen}(-x) + \cos(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \\
&= -2 \operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{sen} x = \\
&= -\operatorname{sen} x - \cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} -\cos(-x) + \operatorname{tg}(\pi - x) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \\
&= -\cos x - \operatorname{tg} x + \cos x + \cos x = \\
&= -\operatorname{tg} x + \cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} 2 \cos\left(-x + \frac{3\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}(-x) + \operatorname{sen}(3\pi - x) + \\
+ \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) &= \\
&= -2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{tg} x + \operatorname{sen}(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \\
&= -2 \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = \\
&= -2 \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d)} \operatorname{sen}(x + \pi) + \cos(x - \pi) + \operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) &= \\
&= -\operatorname{sen} x + \cos(\pi - x) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \\
&= -\operatorname{sen} x - \cos x + \cos x = \\
&= -\operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e)} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos(\pi + x) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + \\
+ \operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos^2\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) &= \\
&= (-\operatorname{sen} x)(-\cos x) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \\
&= \operatorname{sen} x \cos x - \cos x \operatorname{sen} x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{f)} 2 \operatorname{sen}(8\pi - x) + 3 \cos\left(-x - \frac{19\pi}{2}\right) + 2 \operatorname{tg}(-x + 200\pi) &= \\
&= -2 \operatorname{sen} x + 3 \cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \operatorname{tg}(-x) = \\
&= -2 \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{tg} x = \\
&= \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{tg} x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{g)} \frac{2 \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{sen}(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \operatorname{sen}(-x)} &= \\
&= \frac{-2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\operatorname{sen} x - \cos x - \operatorname{sen} x} = \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x}{-\cos x} = \\
&= -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \\
&= -\operatorname{tg} x
\end{aligned}$$

$$72. \cos\left(\frac{13\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$$

Como  $\operatorname{sen} \alpha > 0$  e  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ , então  $\alpha$  pertence ao 2.º quadrante.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

Uma vez que  $\alpha$  pertence ao 2.º quadrante, então

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Então:

$$\cos(-4\pi - \alpha) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}(3\pi - \alpha) =$$

$$= \cos \alpha - 2 \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= -\cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= -\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{11\sqrt{2}}{12}$$

**73.**  $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = 2 \Leftrightarrow -\operatorname{tg} \alpha = 2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = -2$

Como  $\operatorname{tg} \alpha < 0$  e  $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , então  $\alpha$  pertence ao 4.º quadrante.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

Uma vez que  $\alpha$  pertence ao 4.º quadrante, então

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \frac{1}{5} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

Uma vez que  $\alpha$  pertence ao 4.º quadrante, então

$$\sin \alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Então:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{tg}(-\alpha) + \sin(\pi + \alpha) =$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha =$$

$$= -\cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{5} + 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5} + 10}{5}$$

**74.**

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{(1 + \operatorname{tg}(\pi + \alpha))^2}{1 + \operatorname{tg}^2(-\alpha)} &= \frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= \frac{1 + 2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 + \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= 1 + \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + \frac{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \\ &= 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad -\frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} &= -\frac{2 \cos \alpha \sin \alpha}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \\ &= -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(-\alpha) \end{aligned}$$

**75.**

a) Seja  $M$  o ponto médio de  $[AB]$ .  
 $\overline{OM} = 3$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AM}}{\overline{OM}} \Leftrightarrow -\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AM}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AM} = -3 \operatorname{tg} \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow -\cos \alpha = \frac{3}{\overline{OA}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA} = -\frac{3}{\cos \alpha}$$

Logo, o perímetro do triângulo  $[OAB]$  é dado por:

$$2 \times (-3 \operatorname{tg} \alpha) + 2 \times \left(-\frac{3}{\cos \alpha}\right) = -6 \operatorname{tg} \alpha - \frac{6}{\cos \alpha}$$

$$\text{b)} \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{2}{5}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{4}{25} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{21}{25}$$

Como  $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ , tem-se que:

$$\cos x = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2}{5}}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{21}} = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

Então:

$$-6 \operatorname{tg} x - \frac{6}{\cos \alpha} = -6 \times \left(-\frac{2\sqrt{21}}{21}\right) - \frac{6}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} =$$

$$= \frac{12\sqrt{21}}{21} + \frac{30\sqrt{21}}{21} = \frac{42\sqrt{21}}{21} = 2\sqrt{21}$$

## Unidade 5 - Funções trigonométricas

Páginas 66 a 91

**76.**

$$\text{a)} \quad f(x) = \sin x - 1$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D'_f = [-2, 0].$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, os zeros de  $f$  são da forma  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{b)} \quad g(x) = 3 \sin x$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq 3 \sin x \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo,  $D'_g = [-3, 3]$ .

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, os zeros de  $g$  são da forma  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$c) h(x) = 2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$D_h = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq -\sin\left(\frac{x}{2}\right) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 3 \geq 2 - \left(\frac{x}{2}\right) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo,  $D'_h = [1, 3]$ .

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2}_{\text{Eq. impossível}}$$

Logo, a função  $h$  não tem zeros.

$$d) i(x) = 2 \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - 5$$

$$D_i = \mathbb{R}$$

$$0 \leq \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2 \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq 2 \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - 5 \leq -3, \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo,  $D'_i = [-5, -3]$ .

$$i(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2}}_{\text{Eq. impossível}}$$

Logo, a função  $i$  não tem zeros.

77.

$$a) f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: \sin x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$f(-x) = \frac{1}{\sin(-x)} = -\frac{1}{\sin x} = -f(x), \forall x \in D_f$$

Logo,  $f$  é uma função ímpar.

$$b) g(x) = \frac{x}{\sin x + 1}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}: \sin x + 1 \neq 0\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

**Cálculo auxiliar**

$$\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$g(-x) = \frac{-x}{\sin(-x) + 1} = \frac{-x}{-\sin x + 1}$$

Assim, existem valores reais para os quais

$g(-x) \neq g(x)$  e  $g(-x) \neq -g(x)$ , logo  $g$  não é uma função par nem ímpar.

$$c) h(x) = \frac{\sin x}{2x}$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R}: 2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$h(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 \times (-x)} = \frac{-\sin x}{-2x} = \frac{\sin x}{2x} = h(x), \forall x \in D_h$$

Logo,  $h$  é uma função par.

78.

$$a) f(x) = 1 + \cos x$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$0 \leq 1 + \cos x \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D'_f = [0, 2]$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, os zeros de  $f$  são da forma  $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

$$b) g(x) = -5 \cos x$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq 5 \cos x \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 5 \geq -5 \cos x \geq -5$$

Logo,  $D'_g = [-5, 5]$ .

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -5 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, os zeros de  $g$  são da forma  $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

$$c) h(x) = 3 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$D_h = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq -1$$

$$\Leftrightarrow 4 \geq 3 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq 2$$

Logo,  $D'_h = [2, 4]$ .

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 3}_{\text{Eq. impossível}}$$

Logo, a função  $h$  não tem zeros.

$$d) i(x) = -1 - 2 \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$D_i = \mathbb{R}$$

$$0 \leq \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2 \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq -2 \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -2$$

$$\Leftrightarrow -1 \geq -1 - 2 \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -3$$

Logo,  $D'_i = [-3, -1]$ .

$$i(x) = 0 \Leftrightarrow -1 - 2 \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}}_{\text{Eq. impossível}}$$

Logo, a função  $i$  não tem zeros.

79.

$$a) f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: \cos x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$f(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = f(x), \forall x \in D_f$$

Logo, a função  $f$  é uma função par.

$$b) g(x) = \frac{x}{\cos x}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}: \cos x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$g(-x) = \frac{-x}{\cos(-x)} = -\frac{x}{\cos x} = -g(x), \forall x \in D_g$$

Logo, a função  $g$  é uma função ímpar.

$$c) h(x) = \sin x + \cos x$$

$$D_h = \mathbb{R}$$

$$h(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x$$

Assim, existem valores reais para os quais

$h(-x) \neq h(x)$  e  $h(-x) \neq -h(x)$ , logo  $h$  não é uma função par nem ímpar.

$$80. d(t) = 40 - 15 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right)$$

$$a) d(2) = 40 - 15 \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) = 40 - 15 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 40 - \frac{15\sqrt{2}}{2} \approx 29,4$$

Passados 2 segundos do início do movimento, a bola encontrava-se a uma distância do chão de aproximadamente 29,4 cm.

$$b) -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -15 \leq 15 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 15$$

$$\Leftrightarrow 15 \geq -15 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \geq -15$$

$$\Leftrightarrow 55 \geq 40 - 15 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \geq 25$$

A distância máxima da bola ao chão é 55 cm e a distância mínima é 25 cm.

81.

$$a) f(x) = \tan(3x)$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$D'_f = \mathbb{R}$$

$$b) g(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1$$

$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}: x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$D'_g = \mathbb{R}$$

$$c) h(x) = \tan^2\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) - 2$$

$$D_h = \left\{x \in \mathbb{R}: 2x + \frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{3\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\tan^2\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \tan^2\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) - 2 \geq -2$$

$$\text{Logo, } D'_h = [-2, +\infty[.$$

82.

$$a) f(x) = \sin(3x)$$

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sin(3x + 2\pi) = \sin(3x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo,  $f$  é uma função periódica de período  $\frac{2\pi}{3}$ .

$$b) g(x) = \cos\left(\frac{x}{5}\right)$$

$$g(x + 10\pi) = \cos\left(\frac{x + 10\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{x}{5} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{x}{5}\right) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo,  $g$  é uma função periódica de período  $10\pi$ .

$$c) h(x) = \tan\left(2\pi x + \frac{\pi}{7}\right)$$

$$h\left(x + \frac{1}{2}\right) = \tan\left(2\pi\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{7}\right) =$$

$$= \tan\left(2\pi x + \pi + \frac{\pi}{7}\right) = \tan\left(2\pi x + \frac{\pi}{7}\right) = h(x), \forall x \in D_h$$

Logo,  $h$  é uma função periódica de período  $\frac{1}{2}$ .

83.

a) Seja  $M$  o ponto médio de  $[PQ]$ .

$$\overline{PM} = \sqrt{2} \cos \alpha$$

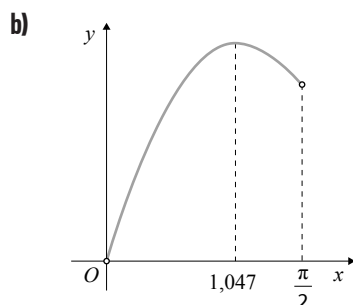
$$\overline{OP} = \sqrt{2} \sin \alpha$$

Logo, a área do triângulo  $[PQO]$  é dada por:

$$\frac{2\sqrt{2} \cos \alpha \times \sqrt{2} \sin \alpha}{2} = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{(\sqrt{2})^2 \pi}{x} \Leftrightarrow x = \alpha$$

Logo, a área do setor circular é dada por  $\alpha$ .  
Assim, a área da região sombreada é dada por:  
 $\alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = f(\alpha)$ .



Logo,  $\alpha \approx 1,047$ .

**84.**

a)  $\arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

b)  $\arcsen\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

c)  $5 \arcsen(-1) = 5 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5\pi}{2}$

d)  $\arcsen\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

**85.**

a)  $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

b)  $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

c)  $-2 \arccos(-1) = -2 \times \pi = -2\pi$

d)  $\arccos\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

e)  $\cos(\arccos 0) = 0$

**86.**

a)  $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

b)  $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

c)  $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

d)  $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$

**87.**  $\cos\left(\arcsen \frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) =$   
 $= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{4}$

**88.**  $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

a) Em  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$ .

b) Em  $[0, \pi]$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$  ou  $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ .

c) Em  $[0, 2\pi]$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$  ou  $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ .

d) Em  $[\pi, 2\pi]$ , nenhum valor de  $x$  satisfaz a condição.

e) Em  $[\pi, 3\pi]$ ,  $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$  ou  $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$ .

**89.**

a)  $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} + 2k\pi \vee x = \frac{6\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b)  $\operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$

$\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \vee 3x + \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 3x = -\frac{3\pi}{10} + 2k\pi \vee 3x = \frac{3\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c)  $\operatorname{sen}(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d)  $2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x (2 \operatorname{sen} x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \vee \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 \vee \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**90.**  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

a) Em  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$ .

b) Em  $[0, \pi]$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$ .

c) Em  $[0, 2\pi]$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$  ou  $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ .

d) Em  $[-\pi, \pi]$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$  ou  $x = -\frac{\pi}{6}$ .

e) Em  $[\pi, 3\pi]$ ,  $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$  ou  $x = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$ .

f) Em  $\mathbb{R}$ ,  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  ou  $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

91.

a)  $\cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{10} + 2k\pi \vee 3x = -\frac{\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

b)  $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \vee \cos x = -1$   
 $\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c)  $\frac{1}{2} \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 2$   
 Eq. impossível

d)  $2 \cos^2(2x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(2x) = \frac{1}{2}$   
 $\Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \vee 2x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

92.  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

a) Em  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$ .

b) Em  $[0, \pi]$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$ .

c) Em  $[0, 2\pi]$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$  ou  $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ .

d) Em  $[-2\pi, \pi]$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$  ou  $x = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$  ou  $x = -2\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3}$ .

e) Em  $\mathbb{R}$ ,  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

93.

a)  $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b)  $\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow 2x = x + \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

c)  $\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = 1$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \vee \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

94.

a)  $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x =$   
 $= (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) =$   
 $= \sin^2 x - (1 - \sin^2 x) =$   
 $= \sin^2 x - 1 + \sin^2 x =$   
 $= 2 \sin^2 x - 1$

b)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

c)  $\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$   
 $\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d)  $\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = -1$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

95.

a)  $T(t) = 17 \Leftrightarrow 17 + 4 \cos\left(\frac{\pi(t+7)}{12}\right) = 17$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi(t+7)}{12}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi(t+7)}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \pi(t+7) = 6\pi + 12k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t+7 = 6 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = -1 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$

Se  $k=1$ , então  $t=11$ .

Se  $k=2$ , então  $t=23$ .

Logo, a água esteve à temperatura de 17 °C às 11 h e às 23 h.

96.

a)  $\cos x = 0,7$

**Cálculo auxiliar**

$$\cos^{-1}(0,7) \approx 0,80$$

Então,  $x \approx 0,80 + 2k\pi \vee x \approx -0,80 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Se  $k=0$ , então  $x \approx 0,80$  rad ou  $x \approx -0,80$  rad e ambos os valores pertencem ao intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

b)  $\sin(2x) = \frac{3}{5}$

**Cálculo auxiliar**

$$\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 0,64$$

Então:

$$2x \approx 0,64 + 2k\pi \vee 2x \approx \pi - 0,64 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou seja:

$$2x \approx 0,64 + 2k\pi \vee 2x \approx 2,50 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Pelo que:

$$x \approx 0,32 + k\pi \vee x \approx 1,25 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se  $k = 0$ , então  $x \approx 0,32 \text{ rad}$  ou  $x \approx 1,25 \text{ rad}$ , e ambos os valores pertencem ao intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**c)**  $\text{tg}(3x) = -1,2$

**Cálculo auxiliar**

$$\text{tg}^{-1}(-1,2) \approx -0,88$$

Então:

$$3x \approx -0,88 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou seja:

$$x \approx -0,29 + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Se  $k = 1$ , então  $x \approx 0,76 \text{ rad} \in [0, \pi]$ .

Se  $k = 2$ , então  $x \approx 1,80 \text{ rad} \in [0, \pi]$ .

Se  $k = 3$ , então  $x \approx 2,85 \text{ rad} \in [0, \pi]$ .

**97.**

**a)**  $2 \cos x \text{tg} x = -\text{tg} x$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x \text{tg} x + \text{tg} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{tg} x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{tg} x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se  $k = 0$ , então  $x = 0 \in [0, 2\pi]$  ou

$$x = \frac{2\pi}{3} \in [0, 2\pi] \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} \notin [0, 2\pi].$$

Se  $k = 1$ , então  $x = \pi \in [0, 2\pi]$  ou

$$x = \frac{8\pi}{3} \notin [0, 2\pi] \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi].$$

Se  $k = 2$ , então  $x = 2\pi \in [0, 2\pi]$  ou

$$x = \frac{14\pi}{3} \notin [0, 2\pi] \text{ ou } x = \frac{10\pi}{3} \notin [0, 2\pi].$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}.$$

**b)**  $-3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = 3$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{13\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{20} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } x = -\frac{7\pi}{20} \in ]-\pi, 2\pi].$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } x = \frac{13\pi}{20} \in ]-\pi, 2\pi].$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } x = \frac{33\pi}{20} \in ]-\pi, 2\pi].$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{-\frac{7\pi}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{33\pi}{20}\right\}.$$

**c)**  $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\sin x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(-x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = -x + 2k\pi \vee \frac{x}{2} = \pi + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 2k\pi \vee -\frac{x}{2} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = 4k\pi \vee x = -2\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4k\pi}{3} \vee x = -2\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se  $k = 0$ , então  $x = 0 \in [0, 2\pi]$  ou

$x = -2\pi \notin [0, 2\pi]$ .

Se  $k = 1$ , então  $x = \frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi]$  ou

$x = 2\pi \in [0, 2\pi]$ .

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{0, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}.$$

**d)**  $\cos(2x) = -\cos x$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\pi - x)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pi - x + 2k\pi \vee 2x = -\pi + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \vee x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se  $k = 0$ , então  $x = \frac{\pi}{3} \in [-\pi, \pi]$  ou

$x = -\pi \in [-\pi, \pi]$ .

Se  $k = -1$ , então  $x = -\frac{\pi}{3} \in [-\pi, \pi]$  ou

$x = -3\pi \notin [-\pi, \pi]$ .

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{-\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}.$$

**98.**  $\cos^2 x + 2 \sin x = 2$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x + 2 \sin x = 2$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 1)^2 = 0$$

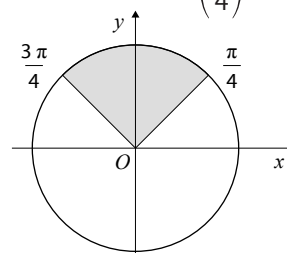
$$\Leftrightarrow \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1$$

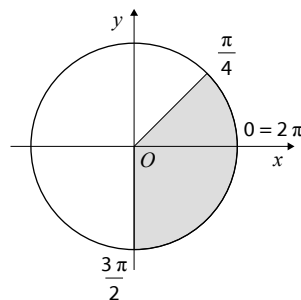
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**99.**

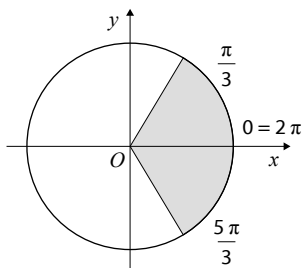
**a)**  $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x > \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$



Uma vez que  $x \in [0, 2\pi]$ , então C.S. =  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ .



**b)**  $\cos x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \geq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$



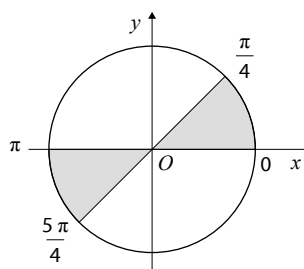
Uma vez que  $x \in [0, 2\pi]$ , então

C.S. =  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$ .

Uma vez que  $x \in [0, 2\pi]$ , então

C.S. =  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ .

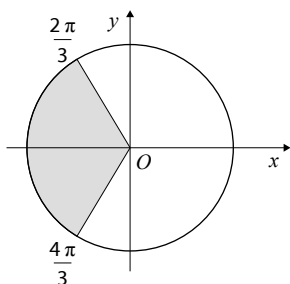
**b)**  $\operatorname{tg} x \geq 0 \wedge \operatorname{tg} x \leq 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \geq \operatorname{tg} 0 \wedge \operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)$



Uma vez que  $x \in [0, 2\pi]$ , então

C.S. =  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$ .

**c)**  $\cos x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$



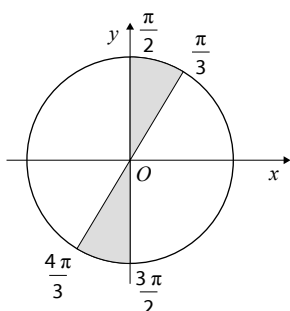
Uma vez que  $x \in [0, 2\pi]$ , então C.S. =  $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ .

**c)**  $|\operatorname{sen} x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow |\operatorname{sen} x| < \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

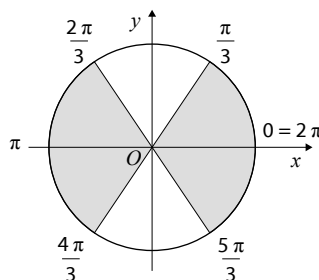
$\Leftrightarrow -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) < \operatorname{sen} x < \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

**d)**  $\operatorname{tg} x > \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)$



Uma vez que  $x \in [0, 2\pi]$ , então

C.S. =  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right]$ .



Uma vez que  $x \in [0, 2\pi]$ , então

C.S. =  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$ .

100.

**a)**  $\operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \cos x \geq 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x < \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \wedge \cos x \geq \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$



## Aprende Fazendo

Páginas 96 a 114

1.  $\operatorname{tg} 20^\circ = \frac{2,3}{x} \Leftrightarrow x = \frac{2,3}{\operatorname{tg} 20^\circ}$

Logo,  $x \approx 6,32$  metros.

A opção correta é a (A).

2.  $-2018^\circ = -6 \times 360^\circ + 142^\circ$

O lado extremidade de um ângulo de amplitude  $-2018^\circ$  pertence ao 2.º quadrante.

A opção correta é a (B).

3.  $P(2 \cos 120^\circ, 2 \sin 120^\circ) =$

$$= \left( 2 \times \left( -\frac{1}{2} \right), 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (-1, \sqrt{3})$$

A opção correta é a (C).

4.  $\frac{9\pi}{8} = \pi + \frac{\pi}{8}$ , logo  $\frac{\pi}{8}$  e  $\frac{9\pi}{8}$  não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

$-\frac{19\pi}{10} = -2\pi + \frac{\pi}{10}$ , logo  $\frac{\pi}{10}$  e  $-\frac{19\pi}{10}$  correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

$\frac{7\pi}{2} = 3\pi + \frac{\pi}{2}$ , logo  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{7\pi}{2}$  não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

$\frac{2016\pi}{6} = 351\pi$ , logo  $\frac{2016\pi}{6}$  e  $\frac{\pi}{6}$  não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

A opção correta é a (B).

5.  $\sin 1 < \sin \pi \Leftrightarrow \sin 1 < 0$  é uma afirmação falsa, uma vez que o ângulo de amplitude 1 rad é um ângulo do 1.º quadrante, pelo que o seu seno é positivo.

$\cos 2 > \cos 1$  é uma afirmação falsa, uma vez que os ângulos de amplitudes 1 rad e 2 rad são ângulos do 1.º quadrante e, neste quadrante, o cosseno é decrescente.

$\cos 2 > \cos \pi \Leftrightarrow \cos 2 > -1$  é uma afirmação verdadeira.

$\operatorname{tg} 3 > 0$  é uma afirmação falsa, uma vez que o ângulo de amplitude 3 rad é um ângulo do 2.º quadrante, pelo que a sua tangente é negativa.

A opção correta é a (C).

6.  $\sin \left( -\frac{\pi}{2} - x \right) = -\sin \left( \frac{\pi}{2} + x \right) = -\cos x$ . Uma vez que

$x \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right]$ , então  $\cos x < 0$  e, portanto,  $-\cos x > 0$ .

$\sin (-24\pi + x) = \sin x$ . Uma vez que  $x \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right]$ , então  $\sin x < 0$ .

Uma vez que  $x \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right]$ , então  $\operatorname{tg} x > 0$ .

$\cos \left( \frac{\pi}{2} + x \right) = -\sin x$ . Uma vez que  $x \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right]$ , então  $\sin x < 0$  e, portanto,  $-\sin x > 0$ .

A opção correta é a (B).

7.  $\cos \left( \frac{5\pi}{3} \right) + \sin \left( -\frac{5\pi}{6} \right) + \operatorname{tg} \left( -\frac{7\pi}{4} \right) =$   
 $= \cos \left( 2\pi - \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) - \operatorname{tg} \left( 2\pi - \frac{\pi}{4} \right) =$   
 $= \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left( \frac{\pi}{6} \right) + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1$

A opção correta é a (B).

8.  $\cos \left( -\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \cos \beta = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \beta = \sin \alpha \cos \beta$

Como  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , então  $\sin \alpha < 0$ .

Como  $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ , então  $\cos \beta > 0$ .

Logo,  $\sin \alpha \cos \beta < 0$  e a afirmação é verdadeira.

$\sin (-\pi - \alpha) \cos \left( -\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) =$

$= -\sin (\pi + \alpha) \cos \left( \frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = \sin \alpha \left( -\cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right) =$

$= \sin \alpha \sin \alpha$ . Como  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , então  $\sin \alpha < 0$ .

Logo,  $\sin \alpha \sin \alpha > 0$  e a afirmação é verdadeira.

$-\sin \left( \frac{7\pi}{2} + \alpha \right) - \cos \beta = -\sin \left( \frac{3\pi}{2} + \alpha \right) - \cos \beta =$

$= \sin \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) - \cos \beta = \cos \alpha - \cos \beta$

Como  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , então  $\cos \alpha < 0$ .

Como  $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ , então  $\cos \beta > 0$ .

Logo,  $\cos \alpha - \cos \beta < 0$  e a afirmação é verdadeira.

$-\operatorname{tg} (-\pi - \alpha) < -\operatorname{tg} (-\beta) \Leftrightarrow \operatorname{tg} (\pi + \alpha) < \operatorname{tg} \beta$   
 $\Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta$

Como  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , então  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ .

Como  $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ , então  $\operatorname{tg} \beta < 0$ . Logo,  $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$  e a afirmação é falsa.

A opção correta é a (D).

9. Uma vez que  $\alpha$  é um ângulo do 2.º quadrante e  $\beta$  é um ângulo do 3.º quadrante, tem-se que  $\operatorname{tg} \alpha < 0$  e  $\operatorname{tg} \beta > 0$ , pelo que  $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta$ .

Uma vez que  $\alpha$  é um ângulo do 2.º quadrante e  $\beta$  é um ângulo do 3.º quadrante, tem-se que  $\sin \alpha > 0$  e  $\cos \beta < 0$ , pelo que  $\sin \alpha > \cos \beta$ .

Uma vez que  $\beta$  é um ângulo do 3.º quadrante, tem-se que  $\operatorname{tg} \beta > 0$  e  $\cos \beta < 0$ , pelo que  $\operatorname{tg} \beta > \cos \beta$ .

Uma vez que  $\alpha$  é um ângulo do 2.º quadrante e  $\beta$  é um ângulo do 3.º quadrante, tem-se que  $\cos \alpha < 0$  e  $\sin \beta < 0$ , pelo que  $\cos \alpha + \sin \beta < 0$ .  
A opção correta é a (B).

10.  $-1 \leq \cos(\pi t) \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq \cos(\pi t) + 5 \leq 6$

Logo, a distância do centro da rolha ao fundo do lago varia entre 4 metros e 6 metros.

A opção correta é a (A).

11.  $\tan^2 x = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \vee \tan x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Então, no intervalo  $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ , a equação tem três

soluções:  $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$  e  $\frac{5\pi}{4}$

A opção correta é a (C).

12. A afirmação (I) é falsa porque o valor do seno e o valor do cosseno são sempre menores ou iguais a 1. A afirmação (II) é falsa porque no 2.º quadrante o cosseno é decrescente.

A afirmação (III) é falsa porque  $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1$ .

A opção correta é a (A).

13. Os lados extremidade dos ângulos de amplitudes  $300^\circ + k 180^\circ, k \in \mathbb{Z}_0^+$  situam-se nos 2.º e 4.º quadrantes.

A opção correta é a (B).

14. Para que  $\tan \theta \times \sin \theta < 0$ , então o lado extremidade de  $\theta$  terá de se situar nos 2.º ou 3.º quadrantes.  $800^\circ = 2 \times 360^\circ + 80^\circ$ , pelo que o lado extremidade deste ângulo se situa no 1.º quadrante.

$-440^\circ = -360^\circ - 80^\circ$ , pelo que o lado extremidade deste ângulo se situa no 4.º quadrante.

$690^\circ = 360^\circ + 330^\circ$ , pelo que o lado extremidade deste ângulo se situa no 4.º quadrante.

$-530^\circ = -360^\circ - 170^\circ$ , pelo que o lado extremidade deste ângulo se situa no 3.º quadrante.

A opção correta é a (D).

15.

a)  $D = \{\alpha \in \mathbb{R} : \cos \alpha \neq 0 \wedge 1 + \sin \alpha \neq 0\}$

#### Cálculos auxiliares

•  $\cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

•  $1 + \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Logo,  $D = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} =$

$= \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

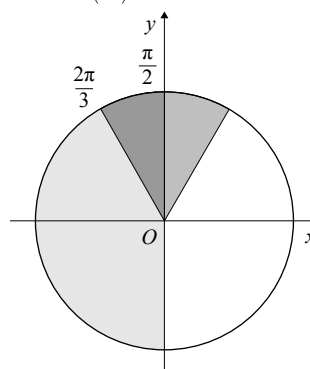
A opção correta é a (D).

b)  $\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} =$   
 $= \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \times \frac{1 - \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} =$   
 $= \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha(1 - \sin \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha} =$   
 $= \frac{\cos \alpha(1 + \sin \alpha) + \cos \alpha(1 - \sin \alpha)}{\cos^2 \alpha} =$   
 $= \frac{1 + \sin \alpha + 1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}$

A opção correta é a (A).

16.  $\sin \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \tan \alpha < 0$

$\Leftrightarrow \sin \alpha \geq \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \wedge \tan \alpha < \tan 0$



Logo,  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ .

A opção correta é a (D).

17. Se  $\sin \alpha \times \cos \alpha > 0$ , então  $\alpha$  é um ângulo do 1.º ou do 3.º quadrantes. Se  $x_1 < x_2 \Rightarrow \cos x_1 < \cos x_2$ , então o cosseno é crescente, e isso acontece no 3.º e no 4.º quadrantes. Logo,  $\alpha$  é um ângulo do 3.º quadrante, onde o seno é decrescente.

A opção correta é a (B).

18.  $\alpha + \beta = \pi \Leftrightarrow \alpha = \pi - \beta$

$\beta + \gamma = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \gamma = \frac{3\pi}{2} - \beta$

Assim:

$\cos \alpha + \cos \beta + \sin \gamma =$   
 $= \cos(\pi - \beta) + \cos \beta + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) =$   
 $= -\cos \beta + \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = -\cos \beta =$   
 $= -\cos(\pi - \alpha) =$

$$= \cos \alpha$$

A opção correta é a (D).

$$\begin{aligned} 19. |\cos x| = 1 &\Leftrightarrow \cos x = 1 \vee \cos x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

A opção correta é a (B).

$$\begin{aligned} 20. f(x) &= \cos(2x) \\ \text{Maximizantes de } f: \\ \cos(2x) &= 1 \Leftrightarrow 2x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{Minimizantes de } f: \\ \cos(2x) &= -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

No intervalo  $]0, 2\pi]$ , a função  $f$  tem 4 maximizantes e minimizantes. Assim, no intervalo  $]0, 50\pi]$  terá  $4 \times 25 = 100$  maximizantes e minimizantes, mas um deles é  $50\pi$ . Logo, no intervalo  $]0, 50\pi]$ , a função  $f$  tem 99 maximizantes e minimizantes. A opção correta é a (B).

$$\begin{aligned} 21. \arcsen\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right) - \arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) &= \\ = \arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \\ = -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} &= \\ = -\frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

A opção correta é a (A).

22.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin \alpha &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; \cos \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ \sin \gamma &= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \cos \gamma = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; \operatorname{tg} \gamma = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

b) Segundo o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = 10^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 244$$

$$\text{Logo, } \overline{AC} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}.$$

$$\sin \alpha = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61};$$

$$\cos \alpha = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\sin \gamma = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61};$$

$$\cos \gamma = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61}; \operatorname{tg} \gamma = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

c) Segundo o Teorema de Pitágoras:

$$15^2 = \overline{AB}^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 81$$

$$\text{Logo, } \overline{AB} = 9.$$

$$\sin \alpha = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; \cos \alpha = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\sin \gamma = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}; \cos \gamma = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; \operatorname{tg} \gamma = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

d) Segundo o Teorema de Pitágoras:

$$17^2 = \overline{BC}^2 + 8^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 225$$

$$\text{Logo, } \overline{BC} = 15.$$

$$\sin \alpha = \frac{15}{17}; \cos \alpha = \frac{8}{17}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$$

$$\sin \gamma = \frac{8}{17}; \cos \gamma = \frac{15}{17}; \operatorname{tg} \gamma = \frac{8}{15}$$

$$23. \sin \alpha = \frac{4}{5}, \text{ logo } \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 53,1^\circ.$$

$$\cos \gamma = \frac{12}{13}, \text{ logo } \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) \approx 22,6^\circ.$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{7}{5}, \text{ logo } \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{7}{5}\right) \approx 54,5^\circ.$$

24. Seja  $h$  a altura do pinheiro.

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{3,2} \Leftrightarrow h = 3,2 \operatorname{tg} 60^\circ$$

Logo, a altura do pinheiro é de aproximadamente 5,54 metros.

$$25. \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{BC}}{150} \Leftrightarrow \overline{BC} = 150 \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 150 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \overline{BC} = 50\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\overline{AC}}{150} \Leftrightarrow \overline{AC} = 150 \operatorname{tg} 45^\circ \Leftrightarrow \overline{AC} = 150$$

$$\text{Logo, } \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} = 150 - 50\sqrt{3} \text{ metros.}$$

26. Seja  $x$  o comprimento da escada e seja  $\alpha$  o ângulo que a escada faz com o chão.

$$\cos \alpha = \frac{0,1x}{x} \Leftrightarrow \cos \alpha = 0,1$$

$$\text{Logo, } \alpha = \cos^{-1}(0,1) \approx 84^\circ.$$

$$27. \operatorname{tg}(\widehat{MAB}) = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\widehat{MAB}) = \frac{\overline{MB}}{2\overline{BC}}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\widehat{MAB}) = \frac{\overline{MB}}{2 \times 2\overline{MB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\widehat{MAB}) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Logo, } \widehat{MAB} = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right).$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{CAB}) = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\widehat{CAB}) = \frac{\overline{CB}}{2\overline{CB}}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\widehat{CAB}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } \widehat{CAB} = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ.$$

$$\text{Assim, } \widehat{CAM} = \widehat{CAB} - \widehat{MAB} =$$

$$= \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 12,5^\circ.$$

**28.**

**a)** O seno e o cosseno têm o mesmo sinal no 1.º quadrante (ambos são positivos) e no 3.º quadrante (ambos são negativos).

**b)** O cosseno e a tangente são negativos no 2.º quadrante.

**c)** O seno cresce e o cosseno decresce no 1.º quadrante.

**d)** O cosseno e a tangente crescem no 3.º e no 4.º quadrantes.

**29.** Miguel:  $\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} + \frac{16}{25} = \frac{17}{25} \neq 1$ , o que contraria a Fórmula Fundamental da Trigonometria.

$$\text{Filipa: } \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

Logo, a Filipa tem razão.

**30.**

$$\mathbf{a)} \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{21}{25}$$

$$\text{Uma vez que } \alpha \text{ é um ângulo agudo, } \cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}.$$

$$\mathbf{b)} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$$

**31.**

$$\mathbf{a)} 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 3^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{10}$$

Uma vez que  $\alpha$  é um ângulo agudo:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\mathbf{b)} \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{1}{10} = 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{9}{10}$$

Uma vez que  $\alpha$  é um ângulo agudo:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

**32.**

$$\mathbf{a)} \operatorname{sen} 45^\circ \times \cos 30^\circ - \cos^2 10^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ - \operatorname{sen}^2 10^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - (\cos^2 10^\circ + \operatorname{sen}^2 10^\circ) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - 4}{4}$$

$$\mathbf{b)} (\operatorname{sen} 30^\circ + \cos 45^\circ)^2 + \frac{\cos 68^\circ}{\operatorname{sen} 22^\circ} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\cos 68^\circ}{\operatorname{sen} (90^\circ - 22^\circ)} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\cos 68^\circ}{\cos 68^\circ} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + 1 =$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7 + 2\sqrt{2}}{4}$$

$$\mathbf{c)} \operatorname{tg} 30^\circ \times \operatorname{tg} 60^\circ + \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} + \frac{1}{2} + 1 =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$\mathbf{d)} \operatorname{sen}^2 12^\circ + \operatorname{sen}^2 78^\circ + \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} =$$

$$= \operatorname{sen}^2 12^\circ + \operatorname{sen}^2 (90^\circ - 12^\circ) + \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \operatorname{sen}^2 12^\circ + \cos^2 12^\circ + \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} =$$

$$= 1 + \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} =$$

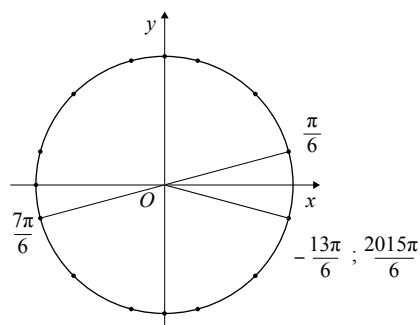
$$= 1 + \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} =$$

$$= 1 + 2 - \sqrt{3} =$$

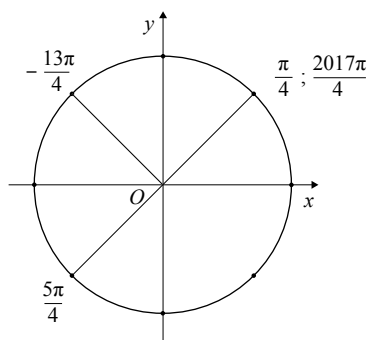
$$= 3 - \sqrt{3}$$

**33.**

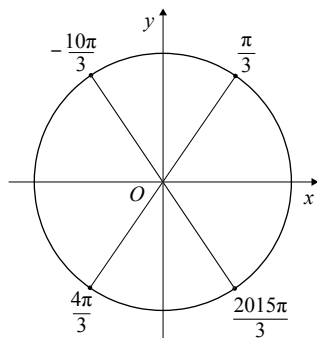
**a)**



b)



c)



34.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{0,5}{x} &= \frac{\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{0,5 \times 180}{\pi}, \text{ logo } x \approx 28,6479. \\ \frac{0,6479}{y} &= \frac{1}{60} \Leftrightarrow y = 60 \times 0,6479 \Leftrightarrow y = 38,874 \\ \frac{0,874}{z} &= \frac{1}{60} \Leftrightarrow z = 60 \times 0,874 \Leftrightarrow z = 52,44 \end{aligned}$$

Logo, 0,5 radianos correspondem a, aproximadamente,  $28^\circ 38' 52''$ .

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{7}{x} &= \frac{\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{7 \times 180}{\pi}, \text{ logo } x \approx 401,0705. \\ \frac{0,0705}{y} &= \frac{1}{60} \Leftrightarrow y = 60 \times 0,0705 \Leftrightarrow y = 4,23 \\ \frac{0,23}{z} &= \frac{1}{60} \Leftrightarrow z = 60 \times 0,23 \Leftrightarrow z = 13,8 \end{aligned}$$

Logo, 7 radianos correspondem a, aproximadamente,  $401^\circ 4' 14''$ .

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \frac{10\pi}{11} &= \frac{\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{10\pi}{11} \times 180}{\pi}, \text{ logo } \\ x &\approx 163,6364. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{0,6364}{y} &= \frac{1}{60} \Leftrightarrow y = 60 \times 0,6364 \Leftrightarrow y = 38,184 \\ \frac{0,184}{z} &= \frac{1}{60} \Leftrightarrow z = 60 \times 0,184 \Leftrightarrow z = 11,04 \end{aligned}$$

Logo,  $\frac{10\pi}{11}$  radianos correspondem a, aproximadamente,  $163^\circ 38' 11''$ .

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \frac{24\pi}{7} &= \frac{\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{24\pi}{7} \times 180}{\pi}, \text{ logo } \\ x &\approx 617,1429. \end{aligned}$$

$$\frac{0,1429}{y} = \frac{1}{60} \Leftrightarrow y = 60 \times 0,1429 \Leftrightarrow y = 8,574$$

$$\frac{0,574}{z} = \frac{1}{60} \Leftrightarrow z = 60 \times 0,574 \Leftrightarrow z = 34,44$$

Logo,  $\frac{24\pi}{7}$  radianos correspondem a, aproximadamente,  $617^\circ 8' 34''$ .

$$\begin{aligned} 35. \quad &\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}(-10\pi) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \\ &-\cos^2\left(\frac{\pi}{5} + 2\pi\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6} - 4\pi\right) + \operatorname{tg} 0 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \\ &-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 0 - \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2}{2} \end{aligned}$$

A Carlota tinha razão.

36.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(x) &= (1 - \operatorname{sen} x)^2 - (\operatorname{sen} x + 1)(\operatorname{sen} x - 1) = \\ &= 1 - 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x - (\operatorname{sen}^2 x - 1) = \\ &= 1 - 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 = \\ &= 2 - 2 \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 &\Leftrightarrow 2 \geq -2 \operatorname{sen} x \geq -2 \\ &\Leftrightarrow 4 \geq 2 - 2 \operatorname{sen} x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } D'_f = [0, 4].$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad f(x) &= 0 \Leftrightarrow 2 - 2 \operatorname{sen} x = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

37.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad g(x) &= \operatorname{sen}^2 x + (1 + \cos x)^2 = \\ &= \operatorname{sen}^2 x + 1 + 2 \cos x + \cos^2 x = \\ &= \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 1 + 2 \cos x = \\ &= 1 + 1 + 2 \cos x = \\ &= 2 + 2 \cos x = \\ &= 2(\cos x + 1) \end{aligned}$$

b)  $D_g = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos x \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 2(\cos x + 1) \leq 4 \end{aligned}$$

Logo,  $D'_g = [0, 4]$ .

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow 2(\cos x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ &\Leftrightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

Uma vez que  $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ , então

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } g(\alpha) &= 2(\cos \alpha + 1) = 2\left(\frac{3\sqrt{10}}{10} + 1\right) = \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{5} + 2. \end{aligned}$$

38.

a)  $D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\operatorname{tg}^2 x \geq 0 \Leftrightarrow -\operatorname{tg}^2 x \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{tg}^2 x \leq 1$$

Logo,  $D'_h = ]-\infty, 1]$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } h(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 - \operatorname{tg}^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = 1 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \vee \operatorname{tg} x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Se  $k = 0$ , então  $x = \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ .

Se  $k = -1$ , então  $x = -\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ .

Se  $k = 1$ , então  $x = \frac{3\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ .

Logo, em  $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ , os zeros de  $h$  são  $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{3\pi}{4}$ .

c)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow -\sin \alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{5}$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{25} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{24}{25}$$

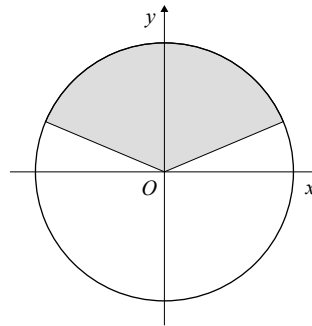
$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\frac{24}{25}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{25}{24} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{24}$$

Logo,  $h(\alpha) = 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$ .

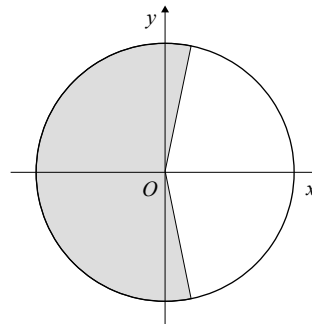
39.

a)  $\sin x > \sin 25^\circ$



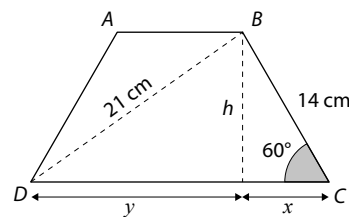
Logo,  $x \in ]25^\circ, 155^\circ[$ .

b)  $\cos x < \cos 80^\circ$



Logo,  $x \in ]80^\circ, 280^\circ[$ .

40.



$$\sin 60^\circ = \frac{h}{14} \Leftrightarrow h = 14 \sin 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow h = 14 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = 7\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{14} \Leftrightarrow x = 14 \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 14 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 7$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$21^2 = y^2 + (7\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow y^2 = 441 - 147 \Leftrightarrow y^2 = 294$$

Logo,  $y = \sqrt{294} = 7\sqrt{6}$ .

Então,  $\overline{AB} = 7\sqrt{6} - 7$ .

Logo, o perímetro do trapézio é dado por:

$$14 + 7\sqrt{6} - 7 + 14 + 7 + 7\sqrt{6} = 28 + 14\sqrt{6} \text{ cm}$$

A área do trapézio é dada por:

$$\frac{7\sqrt{6} + 7 + 7\sqrt{6} - 7}{2} \times 7\sqrt{3} =$$

$$= \frac{14\sqrt{6}}{2} \times 7\sqrt{3} = 49\sqrt{18} = 147\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

41. Sejam  $x$  a altura do farol e  $y$  a distância entre o penhasco e a primeira posição do barco.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{y} \\ \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{x}{y+100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \operatorname{tg} 30^\circ \\ x = y \operatorname{tg} 15^\circ + 100 \operatorname{tg} 15^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \operatorname{tg} 30^\circ = y \operatorname{tg} 15^\circ + 100 \operatorname{tg} 15^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \operatorname{tg} 30^\circ - y \operatorname{tg} 15^\circ = 100 \operatorname{tg} 15^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y (\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ) = 100 \operatorname{tg} 15^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{100 \operatorname{tg} 15^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{100 \operatorname{tg} 15^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ} \times \operatorname{tg} 30^\circ \\ y = \frac{100 \operatorname{tg} 15^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ} \end{cases}$$

Assim,  $x = 50$  metros.

42.  $\alpha + \beta = 18^\circ + 14^\circ = 32^\circ$

Sejam  $x$  a distância entre o pé do candeeiro e a luz que projeta e  $y$  a altura do candeeiro.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 14^\circ = \frac{x}{y} \\ \operatorname{tg} 32^\circ = \frac{x+0,75}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \operatorname{tg} 14^\circ \\ x + 0,75 = y \operatorname{tg} 32^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \operatorname{tg} 32^\circ - y \operatorname{tg} 14^\circ = 0,75 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y (\operatorname{tg} 32^\circ - \operatorname{tg} 14^\circ) = 0,75 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{0,75}{\operatorname{tg} 32^\circ - \operatorname{tg} 14^\circ} \end{cases}$$

Assim,  $y \approx 2$  metros.

43.  $180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$

Sejam  $a$  a distância entre o ponto A e o barco e  $b$  a distância entre o ponto B e o barco.

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\operatorname{sen} 80^\circ}{30} = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{b} = \frac{\operatorname{sen} 40^\circ}{a}$$

Então:

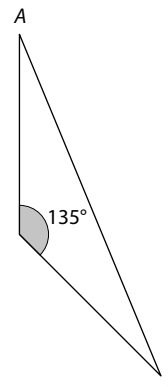
$$\frac{\operatorname{sen} 80^\circ}{30} = \frac{\operatorname{sen} 40^\circ}{a} \Leftrightarrow a = \frac{30 \operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen} 80^\circ}$$

Logo,  $a \approx 19,6$  metros.

$$\frac{\operatorname{sen} 80^\circ}{30} = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{b} \Leftrightarrow b = \frac{30 \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 80^\circ}$$

Logo,  $b \approx 26,4$  m.

44.



Pela Lei dos Cossenos:

$$\overline{AB}^2 = 20^2 + 25^2 - 2 \times 20 \times 25 \times \cos 135^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 1025 - 1000 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 1025 + 500\sqrt{2}$$

Assim,  $\overline{AB} = \sqrt{1025 + 500\sqrt{2}}$  km.

45.

- a) Sejam  $\alpha$  a amplitude do ângulo formado pelos dois cabos e  $\beta$  a amplitude do ângulo suplementar do ângulo que o cabo mais curto faz com o solo.

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\operatorname{sen} 42^\circ}{70} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{50} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{50 \operatorname{sen} 42^\circ}{70}$$

Logo:

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{50 \operatorname{sen} 42^\circ}{70} \right) \approx 28,552^\circ$$

Então:

$$\beta \approx 180^\circ - 42^\circ - 28,552^\circ \approx 109,448^\circ$$

Seja  $x$  o comprimento do cabo mais comprido.

Novamente, pela Lei dos Senos:

$$\frac{\operatorname{sen} 42^\circ}{70} = \frac{\operatorname{sen} 109,448^\circ}{x}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{70 \times \operatorname{sen} 109,448^\circ}{\operatorname{sen} 42^\circ}$$

Então,  $x \approx 98,6$  metros.

- b) O ângulo que o cabo mais curto faz com o solo tem amplitude  $180^\circ - 109,448^\circ = 70,552^\circ$ , aproximadamente.

Seja  $h$  a altura do balão ao solo.

$$\operatorname{sen} 70,552^\circ = \frac{h}{70} \Leftrightarrow h = 70 \operatorname{sen} 70,552^\circ$$

Logo,  $h \approx 66,0$  metros.

46.

a) Pela Lei dos Cossenos:

$$4^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \times 6 \times 7 \cos (\hat{A}BC)$$

$$\Leftrightarrow 16 = 85 - 84 \cos (\hat{A}BC)$$

$$\Leftrightarrow 69 = 84 \cos (\hat{A}BC)$$

$$\Leftrightarrow \cos (\hat{A}BC) = \frac{69}{84}$$

$$\text{Logo, } \hat{A}BC = \cos^{-1}\left(\frac{69}{84}\right) \approx 34,8^\circ.$$

Analogamente:

$$6^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \times 4 \times 7 \cos (\hat{C}AB)$$

$$\Leftrightarrow 36 = 65 - 56 \cos (\hat{C}AB)$$

$$\Leftrightarrow 29 = 56 \cos (\hat{C}AB)$$

$$\Leftrightarrow \cos (\hat{C}AB) = \frac{29}{56}$$

$$\text{Logo, } \hat{C}AB = \cos^{-1}\left(\frac{29}{56}\right) \approx 58,8^\circ.$$

Analogamente:

$$7^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \cos (\hat{A}CB)$$

$$\Leftrightarrow 3 = 48 \cos (\hat{A}CB)$$

$$\Leftrightarrow \cos (\hat{A}CB) = \frac{3}{48}$$

$$\text{Logo, } \hat{A}CB = \cos^{-1}\left(\frac{3}{48}\right) \approx 86,4^\circ.$$

b) Pela Lei dos Cossenos:

$$\overline{BC}^2 = 23^2 + 35^2 - 2 \times 23 \times 35 \cos 61^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 1754 - 1610 \cos 61^\circ$$

$$\text{Assim, } \overline{BC} = \sqrt{1754 - 1610 \cos 61^\circ} \approx 31,2.$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 61^\circ}{31,2} = \frac{\sin (\hat{A}BC)}{23} = \frac{\sin (\hat{A}CB)}{35}$$

Logo:

$$\frac{\sin 61^\circ}{31,2} = \frac{\sin (\hat{A}BC)}{23} \Leftrightarrow \sin (\hat{A}BC) = \frac{23 \sin 61^\circ}{31,2},$$

$$\text{o que significa que } \hat{A}BC = \sin^{-1}\left(\frac{23 \sin 61^\circ}{31,2}\right) \approx 40,1^\circ.$$

E:

$$\frac{\sin 61^\circ}{31,2} = \frac{\sin (\hat{A}CB)}{35} \Leftrightarrow \sin (\hat{A}CB) = \frac{35 \sin 61^\circ}{31,2},$$

$$\text{o que significa que } \hat{A}CB = \sin^{-1}\left(\frac{35 \sin 61^\circ}{31,2}\right) \approx 78,9^\circ.$$

c)  $\hat{A}CB = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 60^\circ}{\overline{BC}} = \frac{\sin 80^\circ}{8} = \frac{\sin 40^\circ}{\overline{AC}}$$

$$\text{Logo, } \frac{\sin 60^\circ}{\overline{BC}} = \frac{\sin 80^\circ}{8} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{8 \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ}, \text{ ou}$$

$$\text{seja, } \overline{BC} \approx 7,0.$$

$$\text{E } \frac{\sin 80^\circ}{8} = \frac{\sin 40^\circ}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{8 \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ}, \text{ ou}$$

$$\text{seja, } \overline{AC} \approx 5,2.$$

d) Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 100^\circ}{14} = \frac{\sin (\hat{A}CB)}{12}$$

$$\Leftrightarrow \sin (\hat{A}CB) = \frac{12 \sin 100^\circ}{14}$$

$$\text{Logo, } \hat{A}CB = \sin^{-1}\left(\frac{12 \sin 100^\circ}{14}\right) \approx 57,6^\circ.$$

$$\hat{A}BC \approx 180^\circ - 100^\circ - 57,6^\circ = 22,4^\circ$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 22,4^\circ}{\overline{AC}} = \frac{\sin 100^\circ}{14} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{14 \sin 22,4^\circ}{\sin 100^\circ}$$

$$\text{Logo, } \overline{AC} \approx 5,4.$$

47. Seja  $\alpha$  o ângulo que se quer determinar.

Pela Lei dos Cossenos:

$$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 5 \times 3 \cos \alpha \Leftrightarrow 49 = 34 - 30 \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow 15 = -30 \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ.$$

48.  $\hat{B}DA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 30^\circ}{2,7} = \frac{\sin 120^\circ}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{2,7 \sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{2,7 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2,7\sqrt{3}$$

$$\text{Logo, } \overline{AB} \approx 4,7.$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 60^\circ}{2,4} = \frac{\sin (\hat{B}CD)}{2,7}$$

$$\Leftrightarrow \sin (\hat{B}CD) = \frac{2,7 \sin 60^\circ}{2,4}$$

$$\Leftrightarrow \sin (\hat{B}CD) = \frac{9}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin (\hat{B}CD) = \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

$$\text{Logo, } \hat{B}CD = \sin^{-1}\left(\frac{9\sqrt{3}}{16}\right) \approx 77^\circ.$$

$$\text{Assim, } \hat{C}BA \approx 180^\circ - 30^\circ - 77^\circ = 73^\circ.$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 73^\circ}{\overline{AC}} = \frac{\sin 30^\circ}{2,4} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{2,4 \sin 73^\circ}{0,5}$$

$$\text{Ou seja, } \overline{AC} \approx 4,6.$$



**49.** O quadrante em que o cosseno é crescente e a tangente é negativa é o 4.º quadrante.

**a)** No 4.º quadrante o seno é crescente, logo a afirmação é falsa.

**b)** No 4.º quadrante o cosseno é positivo, logo a afirmação é falsa.

**c)** No 4.º quadrante o seno é negativo e o cosseno é positivo, logo a afirmação é verdadeira.

**d)** No 4.º quadrante a tangente é crescente, logo a afirmação é falsa.

**50.**

**a)**  $\sin 30^\circ \times \cos 45^\circ - \cos 90^\circ + \sin 120^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ =$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{4}$$

**b)**  $\operatorname{tg} 225^\circ + (\sin 60^\circ + \sin 90^\circ)^2 - \cos 150^\circ =$

$$= \operatorname{tg} 45^\circ + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2 + \cos 30^\circ =$$

$$= 1 + \frac{3}{4} + \sqrt{3} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{11}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{11 + 6\sqrt{3}}{4}$$

**c)**  $2 \cos 30^\circ + 4 \cos 60^\circ - \sin 45^\circ + 3 \operatorname{tg} 30^\circ + \sin 135^\circ =$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} =$$

$$= 2\sqrt{3} + 2$$

**d)**  $\cos 120^\circ - \sin^2 135^\circ - \sin 150^\circ =$

$$= -\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} =$$

$$= -1 - \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{3}{2}$$

**51.**

**a)**  $\cos (180^\circ - x) + \sin (360^\circ + x) - \cos (90^\circ - x) =$

$$= -\cos x + \sin x - \sin x =$$

$$= -\cos x$$

**b)**  $\cos (540^\circ - x) + \sin (90^\circ + x) - 2 \operatorname{tg} (-180^\circ - x) +$

$$+ \operatorname{tg} (-x + 270^\circ) =$$

$$= \cos (180^\circ - x) + \cos x + 2 \operatorname{tg} (180^\circ + x) + \operatorname{tg} (270^\circ - x) =$$

$$= -\cos x + \cos x + 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} (90^\circ - x) =$$

$$= 2 \operatorname{tg} x + \frac{\sin (90^\circ - x)}{\cos (90^\circ - x)} =$$

$$= 2 \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= 2 \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

**c)**  $\cos (90^\circ - x) \sin (180^\circ + x) - \operatorname{tg} (180^\circ - x) \sin (90^\circ - x) =$

$$= \sin x \times (-\sin x) + \operatorname{tg} x \times \cos x =$$

$$= -\sin^2 x + \sin x$$

**d)**  $2 \cos (540^\circ - x) + 3 \sin (-x - 810^\circ) +$

$$+ 4 \operatorname{tg} (-x + 1080^\circ) =$$

$$= 2 \cos (180^\circ - x) + 3 \sin (-x - 90^\circ) + 4 \operatorname{tg} (-x) =$$

$$= -2 \cos x - 3 \cos x - 4 \operatorname{tg} x =$$

$$= -5 \cos x - 4 \operatorname{tg} x$$

**52.**

**a)**  $\cos (-\beta) = \cos \beta = k$

**b)**  $\cos (\pi - \beta) = -\cos \beta = -k$

**c)**  $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin \beta = \sqrt{1 - k^2}$

**Cálculo auxiliar**

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \beta = 1 - k^2$$

$$\text{Como } \beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \text{ então } \sin \beta = \sqrt{1 - k^2}.$$

**d)**  $\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = -\sqrt{1 - k^2}$

**e)**  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k}$

**53.**

**a)**  $\sin \alpha \times \cos \alpha \times \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) =$

$$= \sin \alpha \times \cos \alpha \times \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right) =$$

$$= \sin \alpha \times \cos \alpha \times \left(\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}\right) =$$

$$= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha =$$

$$= 1$$

**b)**  $(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) (1 - \sin^2 \alpha) = \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right) \times \cos^2 \alpha =$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \times \cos^2 \alpha =$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$$

$$= 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

**54.**

**a)**  $\frac{3}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{6}\right) - \sin \left(\frac{3\pi}{4}\right) \times \cos \left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos \pi + \sin \left(\frac{200\pi}{3}\right) =$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos \pi + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \\
&= -\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \\
&= \frac{-\sqrt{6} + 4}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad &\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{21\pi}{2}\right)\right)^2 - \cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \\
&= \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 - \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \\
&= \frac{3}{4} + \sqrt{3} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \\
&= \frac{7 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad &2 \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{39\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}(2015\pi) = \\
&= 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \operatorname{sen} \pi = \\
&= 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = \\
&= 1 + \sqrt{2} + 1 = \\
&= 2 + \sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d)} \quad &\cos\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 0 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

**55.**

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad &\cos(-x) + \operatorname{sen}(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{sen}(-x) = \\
&= \cos x - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = \\
&= \cos x - 3 \operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad &\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) + 3 \cos(x + 11\pi) = \\
&= \cos x - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 3 \cos(\pi + x) = \\
&= \cos x - 2 \cos x - 3 \cos x = \\
&= -4 \cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad &\operatorname{tg}(-x) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + 3 \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2} + x\right) - \operatorname{sen}(8\pi + x) = \\
&= -\operatorname{tg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \operatorname{sen} x = \\
&= -\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x + 3 \cos x - \operatorname{sen} x = \\
&= -\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d)} \quad &\operatorname{sen}(-2\pi + x) - 4 \operatorname{tg}(-\pi + x) + \cos(13\pi - x) \operatorname{tg}(x - 3\pi) = \\
&= \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{tg}(\pi - x) - \cos(\pi - x) \operatorname{tg}(\pi - x) = \\
&= \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{tg} x - \cos x \operatorname{tg} x = \\
&= \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x = \\
&= -4 \operatorname{tg} x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e)} \quad &\operatorname{tg}(\pi - x) \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \operatorname{sen}(-x) = \\
&= -\operatorname{tg} x \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{sen} x = \\
&= \operatorname{tg} x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 \cos x + \operatorname{sen} x = \\
&= \operatorname{tg} x \cos x - 2 \cos x + \operatorname{sen} x = \\
&= \operatorname{sen} x - 2 \cos x + \operatorname{sen} x = \\
&= 2 \operatorname{sen} x - 2 \cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{f)} \quad &-\operatorname{sen}(-15\pi - x) + \operatorname{tg}(\pi - x) \operatorname{tg}(\pi + x) + \\
&+ \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \\
&= \operatorname{sen}(\pi + x) - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \\
&= -\operatorname{sen} x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x = \\
&= -\operatorname{sen} x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}^2 x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{g)} \quad &-2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) - \cos(-x + 7\pi) = \\
&= 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi - x) = \\
&= 2 \operatorname{sen} x + \cos x + \cos x = \\
&= 2 \operatorname{sen} x + 2 \cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
56. \quad &\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \sqrt{8} \Leftrightarrow -\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{8} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{8} \\
&1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 8 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9} \\
&\text{Como } \operatorname{tg} \alpha < 0 \text{ e } \alpha \in [2\pi, 3\pi], \text{ tem-se que} \\
&\alpha \in \left[\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right], \text{ pelo que } \cos \alpha = -\frac{1}{3}. \\
&\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{8}{9}
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{sen}(23\pi + \alpha) - \operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) = \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{sen}(\pi + \alpha) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \\
&= -\operatorname{sen} \alpha (-\operatorname{sen} \alpha) + \cos \alpha = \\
&= \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos \alpha = \\
&= \frac{8}{9} - \frac{1}{3} = \\
&= \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
57. \quad &4 \operatorname{sen}(\alpha + \pi) = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{4} \\
&\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{15}{16}$$

Como  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , então  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Então:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \pi) + \operatorname{tg}(-\alpha) &= \cos(\pi - \alpha) - \operatorname{tg} \alpha = \\ &= -\cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha = \\ &= -\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{15}}{15} = \\ &= -\frac{19\sqrt{15}}{60} \end{aligned}$$

58.  $D_f = \{x \in \mathbb{R}: 1 + \cos x \neq 0\}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: \operatorname{sen} x \neq 0\}$

#### Cálculos auxiliares

$$1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo,  $D_f \subset D_g = \{x \in \mathbb{R}: \operatorname{sen} x \neq 0\} = D$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \times \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x}{1 - \cos^2 x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = g(x) \end{aligned}$$

Assim, as funções  $f$  e  $g$  coincidem no domínio  $D$ .

59.

a)  $D_f = \mathbb{R}$

$$-1 \leq \cos(3x + 2) \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq 4 \cos(3x + 2) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 5 + 4 \cos(3x + 2) \leq 9$$

Logo,  $D'_f = [1, 9]$ .

b)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 5 + 4 \cos(3x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(3x + 2) = -\frac{5}{4}$  que é uma equação impossível, visto que  $-\frac{5}{4} < -1$ . Logo, a função  $f$  não tem zeros.

c)  $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 5 + 4 \cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 2\right) =$   
 $= 5 + 4 \cos(3x + 2\pi + 2) = 5 + 4 \cos(3x + 2) =$   
 $= f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ , logo  $\frac{2\pi}{3}$  é período da função  $f$ .

60.

a) Seja  $h$  a altura do triângulo  $[EAB]$ .

$$\operatorname{tg} x = \frac{h}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} x$$

Então, a área do triângulo  $[EAB]$  é dada por:

$$\frac{a \times \frac{a}{2} \operatorname{tg} x}{2} = \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} x$$

Assim, a área da região sombreada da figura é dada por:

$$a^2 - 4 \times \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} x = a^2 - a^2 \operatorname{tg} x = a^2(1 - \operatorname{tg} x) = A(x)$$

b)  $A(x) = 36(1 - \operatorname{tg} x)$

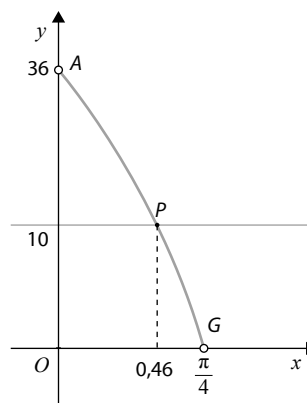
i)  $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$   
 $\Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{8}{9}$

Como  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ , então  $\cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Assim,  $A(\theta) = 36(1 - \operatorname{tg} \theta) = 36\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) =$   
 $= 36 - 9\sqrt{2}$ .

ii)  $A(x) = 18 \Leftrightarrow 36(1 - \operatorname{tg} x) = 18$



Logo,  $x \approx 0,46$  rad.

61.

a)  $\widehat{DAB} = \widehat{CDA}$  e  $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$ , uma vez que  $[ABCD]$  é um trapézio isósceles.

$$\widehat{DAB} = \frac{360^\circ - 2x}{2} = 180^\circ - x$$

Seja  $h$  a altura do trapézio e seja  $a$  tal que  $\overline{AD} = \overline{BC} + 2a$ .

$$\operatorname{sen}(180^\circ - x) = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2 \operatorname{sen}(180^\circ - x)$$

$$\Leftrightarrow h = 2 \operatorname{sen} x$$

$$\cos(180^\circ - x) = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 2 \cos(180^\circ - x)$$

$$\Leftrightarrow a = -2 \cos x$$

Então, a área do trapézio é dada por:

$$\frac{(2 - 4 \cos x) + 2}{2} \times 2 \sin x =$$

$$= \frac{4 - 4 \cos x}{2} \times 2 \sin x =$$

$$= (2 - 2 \cos x) \times 2 \sin x =$$

$$= 4 \sin x - 4 \cos x \sin x$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) &= -\frac{3}{5} \Leftrightarrow -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{3}{5} \\ &\Leftrightarrow -\sin x = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin x = \frac{3}{5} \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \end{aligned}$$

$$\text{Como } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \text{ então } \cos x = -\frac{4}{5}.$$

Logo, a área do trapézio é:

$$4 \sin x - 4 \cos x \sin x = 4 \times \frac{3}{5} - 4 \times \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{108}{25}$$

**62.**

$$\text{a) } 2 \sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } x = -\frac{\pi}{6} \left( \notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right) \text{ ou}$$

$$x = \frac{7\pi}{6} \left( \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{7\pi}{6} \right\}.$$

$$\text{b) } \sqrt{3} + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Logo, C.S.} = \emptyset.$$

$$\text{c) } 2 \sin(2x) + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } x = -\frac{\pi}{8} \left( \notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right) \text{ ou}$$

$$x = \frac{5\pi}{8} \left( \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right).$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } x = \frac{7\pi}{8} \left( \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right) \text{ ou}$$

$$x = \frac{13\pi}{8} \left( \notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \right\}.$$

$$\text{d) } 2\sqrt{3} \sin x = \sqrt{6} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } x = \frac{\pi}{4} \left( \notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right) \text{ ou}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} \left( \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

$$\text{e) } \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } x = \frac{3\pi}{2} \left( \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

$$\text{f) } 2 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ então } x = \frac{2\pi}{3} \left( \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right) \text{ ou}$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} \left( \notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right).$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } x = \frac{8\pi}{3} \left( \notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right) \text{ ou}$$

$$x = \frac{4\pi}{3} \left( \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}.$$

$$\text{g) } 6 \cos(2x) + \sqrt{18} = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ então } x = \frac{9\pi}{8} \left( \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right) \text{ ou}$$

$$x = \frac{7\pi}{8} \left( \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8} \right\}.$$

$$h) 2 \cos(\pi x) = 1 \Leftrightarrow \cos(\pi x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \pi x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \pi x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} + 2k \vee x = -\frac{1}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k=1, \text{ então } x = \frac{7}{3} \left( \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right) \text{ ou}$$

$$x = \frac{5}{3} \left( \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right).$$

$$\text{Se } k=2, \text{ então } x = \frac{13}{3} \left( \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right) \text{ ou}$$

$$x = \frac{11}{3} \left( \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{11}{3}, \frac{13}{3} \right\}.$$

$$i) \operatorname{tg}(3x) = \sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(3x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k=2, \text{ então } x = \frac{13\pi}{18} \left( \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right).$$

$$\text{Se } k=3, \text{ então } x = \frac{19\pi}{18} \left( \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right).$$

$$\text{Se } k=4, \text{ então } x = \frac{25\pi}{18} \left( \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{13\pi}{18}, \frac{19\pi}{18}, \frac{25\pi}{18} \right\}.$$

$$j) 2 \operatorname{tg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{2\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k=0, \text{ então } x = \frac{2\pi}{3} \left( \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

$$k) \sqrt{12} + 2 \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k=1, \text{ então } x = \frac{2\pi}{3} \left( \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left\{ \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

$$l) \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k=1, \text{ então } x = \pi \left( \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right).$$

$$\text{Logo, C.S.} = \{\pi\}.$$

63.

$$a) 2 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \sqrt{3} - 2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$c) 2 \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 3x + \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = -\frac{3\pi}{8} + 2k\pi \vee 3x = \frac{9\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{3\pi}{8} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$d) 2\sqrt{3} \cos(2x) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$e) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{3} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \vee x = -\frac{13\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$f) 2\sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{5} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{15} + 2k\pi \vee x = -\frac{7\pi}{15} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$g) (2 \operatorname{sen} x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \vee 2 \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{h) } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} + 2k\pi \vee$$

$$\vee x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{x}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \frac{2}{3}x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{16} + \frac{3k\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{8} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{i) } \sin^2(3x) = 1 \Leftrightarrow \sin(3x) = 1 \vee \sin(3x) = -1$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 3x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{j) } \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee$$

$$\vee x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{k) } \sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sin x = 3}_{\text{Eq. impossível}} \vee \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{l) } 2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee$$

$$\vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{m) } \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 - \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee$$

$$\vee x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{n) } \operatorname{tg}(3x) = \sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(3x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{o) } 2 \operatorname{tg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{2\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{p) } \sqrt{12} + 2 \operatorname{tg}(2x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{q) } \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{r) } \operatorname{tg}^2(\pi x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\pi x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee \operatorname{tg}(\pi x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \pi x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee \pi x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{6} + k \vee x = -\frac{1}{6} + k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{s) } \operatorname{tg}^2(2x) + \sqrt{3} \operatorname{tg}(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) (\operatorname{tg}(2x) + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = 0 \vee \operatorname{tg}(2x) + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = 0 \vee \operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

t)  $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{sen} x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 2 \operatorname{sen} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x (1 + 2 \cos x) = 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{sen} x = 0 \vee 1 + 2 \cos x = 0) \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left( \operatorname{sen} x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2} \right) \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left( x = k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right) \wedge$$

$$\wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

64.  $d(0) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \pi \times 0 + \frac{\pi}{6} \right) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} \right) =$   
 $= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

$$d(t) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \pi t + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \pi t + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} \left( \pi t + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \pi t = 2k\pi \vee \pi t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = 2k \vee t = \frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

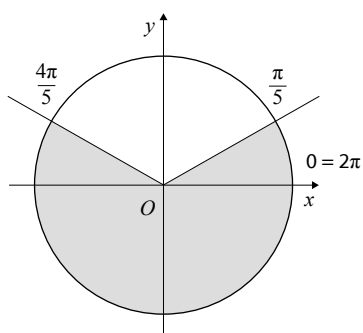
Se  $k = 0$ , então  $t = 0$  ( $\notin ]0, 3]$ ) ou  $t = \frac{2}{3}$  ( $\in ]0, 3]$ ).

Se  $k = 1$ , então  $t = 2$  ( $\in ]0, 3]$ ) ou  $t = \frac{8}{3}$  ( $\in ]0, 3]$ ).

O ponto  $P$  passou pelo ponto  $A$  aos  $\frac{2}{3}$  s, 2 s e  $\frac{8}{3}$  s.

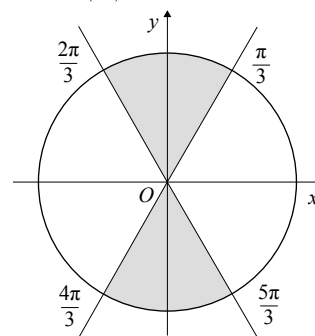
65.

a)  $\operatorname{sen} x < \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{5} \right) \Leftrightarrow \left[ 0, \frac{\pi}{5} \right] \cup \left[ \frac{4\pi}{5}, 2\pi \right]$



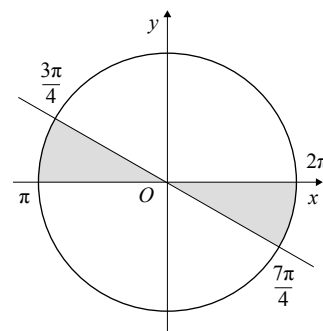
b)  $|\cos x| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{2} \wedge \cos x \geq -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos x \leq \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) \wedge \cos x \geq \cos \left( \frac{2\pi}{3} \right)$$



$$\Leftrightarrow x \in \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right]$$

c)  $\operatorname{tg} x \geq -1 \wedge \operatorname{tg} x \leq 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \geq \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{4} \right) \wedge \operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg} 0$



$$\Leftrightarrow x \in \left[ \frac{3\pi}{4}, \pi \right] \cup \left[ \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right]$$

66. Considere-se o octógono inscrito numa circunferência. Uma vez que o octógono é regular, os seus vértices dividem a circunferência em oito arcos

com a mesma amplitude:  $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

Então,  $\widehat{HIF} = \widehat{GJE} = \frac{2 \times 45^\circ + 4 \times 45^\circ}{2} = 135^\circ$ , uma

vez que são ângulos excêntricos com vértice no interior da circunferência.

Além disso,  $\widehat{HGF} = \widehat{GFE} = \frac{180^\circ \times (8 - 2)}{6} = 135^\circ$ , já

que  $\widehat{HGF}$  e  $\widehat{GFE}$  são ângulos internos do octógono. Assim,  $\widehat{HGF} = \widehat{HIF}$  e  $\widehat{GFE} = \widehat{GJE}$ .

Por outro lado,  $\widehat{JGF} = \widehat{FEJ} = \widehat{GFI} = \widehat{IHG} =$

$$= \frac{2 \times 45^\circ}{2} = 45^\circ$$

já que  $\widehat{JGF}$ ,  $\widehat{FEJ}$ ,  $\widehat{GFI}$  e  $\widehat{IHG}$  são ângulos inscritos na circunferência.

Assim, os quadriláteros  $[GJEF]$  e  $[HIFG]$  têm os ângulos iguais dois a dois, ou seja, são paralelogramos.

Como  $\overline{HG} = \overline{GF} = 2$  e  $[HIFG]$  é um paralelogramo, então também  $\overline{HI} = 2$ .

Como  $\overline{FE} = \overline{GF} = 2$  e  $[GJEF]$  é um paralelogramo, então  $\overline{GJ} = 2$ .

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{HG}^2 + \overline{GJ}^2 = \overline{HJ}^2 \Leftrightarrow \overline{HJ}^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{HJ}^2 = 8$$

Logo,  $\overline{HJ} = 2\sqrt{2}$ .

Assim,  $\overline{IJ} = 2\sqrt{2} - 2 = c$ .

$$67. \sin \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

Sendo  $\alpha$  um ângulo agudo, tem-se que  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ .

Por outro lado:

$$\sin^2 \alpha = \frac{2}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{1}{9} = \frac{2}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 6$$

Pela Lei dos Cossenos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \overline{AC}^2 + 6^2 - 2 \times \overline{AC} \times 6 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 36 - 8\sqrt{2} \times \overline{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{36}{8\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin \alpha}{\overline{AC}} = \frac{\sin \theta}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3}}{\overline{AC}} = \frac{\sin \theta}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = \frac{2}{9\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

Assim, o perímetro do triângulo  $[ABC]$  é:

$$\begin{aligned} \overline{BC} + \overline{AB} + \overline{AC} &= 6 + \frac{9\sqrt{2}}{4} + \frac{9\sqrt{2}}{4} = 6 + \frac{18}{4}\sqrt{2} = \\ &= 6 + \frac{9}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$68. \widehat{GEF} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\widehat{OEH} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

$$\widehat{HOE} = 180^\circ - 15^\circ - 90^\circ = 75^\circ$$

$$\overline{EH} = \frac{8}{2} = 4$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 15^\circ}{\overline{OH}} = \frac{\sin 75^\circ}{4} \Leftrightarrow \overline{OH} = \frac{4 \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ}$$

Logo,  $\overline{OH} \approx 1,07$ .

$$69. \widehat{ADB} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$$\widehat{BAD} = 180^\circ - 130^\circ - 30^\circ = 20^\circ$$

Pela Lei dos Senos:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 20^\circ}{4} &= \frac{\sin 30^\circ}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{4 \sin 30^\circ}{\sin 20^\circ} \\ &\Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{2}{\sin 20^\circ} \end{aligned}$$

$$\widehat{CBD} = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 90^\circ}{\overline{BD}} = \frac{\sin 50^\circ}{\overline{BC}} = \frac{\sin 40^\circ}{\overline{CD}}$$

Assim:

$$\frac{\sin 90^\circ}{\overline{BD}} = \frac{\sin 50^\circ}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{BD} \sin 50^\circ}{\sin 90^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{2}{\sin 20^\circ}, \text{ ou seja, } \overline{BC} \approx 4,5.$$

E:

$$\frac{\sin 90^\circ}{\overline{BD}} = \frac{\sin 40^\circ}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{\overline{BD} \sin 40^\circ}{\sin 90^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{2}{\sin 20^\circ} \sin 40^\circ, \text{ ou seja, } \overline{CD} \approx 3,8.$$

$$70. 100^\circ 59' 8'' = \left( 100 + \frac{887}{900} \right)^\circ$$

$$11^\circ 56' 4'' = \left( 100 + \frac{841}{900} \right)^\circ$$

#### Cálculos auxiliares

$$8'' = \left( \frac{8}{60} \right)'$$

$$\left( 59 + \frac{8}{60} \right)' = \left( \frac{887}{900} \right)^\circ$$

$$4'' = \left( \frac{1}{15} \right)'$$

$$\left( 56 + \frac{1}{15} \right)' = \left( \frac{841}{900} \right)^\circ$$

$$\alpha \approx \left( 100 + \frac{887}{900} \right)^\circ - \left( 11 + \frac{841}{900} \right)^\circ = \left( \frac{40\,073}{450} \right)^\circ$$

Logo:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{O_2T}}{\overline{TL}} \Leftrightarrow \cos \left( \left( \frac{40\,073}{450} \right)^\circ \right) = \frac{6366}{\overline{TL}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{TL} = \frac{6366}{\cos \left( \left( \frac{40\,073}{450} \right)^\circ \right)}$$

Assim,  $\overline{TL} \approx 384\,409$  km.

$$71. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{3,8}{1,6} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{19}{8}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \left( \frac{19}{8} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$



$$\Leftrightarrow \frac{425}{64} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{64}{425}$$

Como  $\alpha$  é um ângulo agudo,

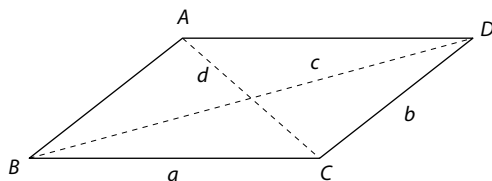
$$\cos \alpha = \frac{8}{5\sqrt{17}} = \frac{8\sqrt{17}}{85}.$$

$$\beta = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \alpha$$

Logo:

$$\cos \beta = \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{8\sqrt{17}}{85}$$

**72.**



Pela Lei dos Cossenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (\widehat{DAB})$$

E:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (\widehat{CDA})$$

$$\Leftrightarrow d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (180^\circ - \widehat{DAB})$$

$$\Leftrightarrow d^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos (\widehat{DAB})$$

Assim:

$$c^2 + d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (\widehat{DAB}) + a^2 + b^2 + 2ab \cos (\widehat{DAB})$$

$$\Leftrightarrow c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$$

**73.** Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Então:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \Leftrightarrow a = \frac{c \sin A}{\sin C}$$

E:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Leftrightarrow b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \frac{\frac{c \sin A}{\sin C} + \frac{c \sin B}{\sin C}}{\frac{c \sin A}{\sin C} - \frac{c \sin B}{\sin C}} = \\ &= \frac{c \sin A + c \sin B}{c \sin A - c \sin B} = \\ &= \frac{c (\sin A + \sin B)}{c (\sin A - \sin B)} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} \end{aligned}$$

**74.**  $\sin \alpha \times \operatorname{tg} \alpha = \frac{16}{15}$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{16}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{16}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{16}{15}$$

$$\Leftrightarrow 15 - 15 \cos^2 \alpha = 16 \cos \alpha \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 15 \cos^2 \alpha + 16 \cos \alpha - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 900}}{30}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \vee \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

Como  $\alpha$  é um ângulo agudo, então  $\cos \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$ .

**75.**  $\sin \beta \times \cos \beta = 0,3$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \beta \times \cos^2 \beta = 0,09 \quad (\sin \beta > 0 \text{ e } \cos \beta > 0)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos^2 \beta) \times \cos^2 \beta = 0,09$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta - \cos^4 \beta = 0,09$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 \beta - \cos^2 \beta + 0,09 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 0,36}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{1}{10} \vee \cos^2 \beta = \frac{9}{10}$$

Como  $\beta \in ]0^\circ, 45^\circ[$ , então  $\cos^2 \beta = \frac{9}{10}$  porque

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \beta < 1 \text{ e, então, } \cos \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

Logo, como  $\beta \in ]0^\circ, 45^\circ[$ , tem-se  $\sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ .

$$\text{Assim, } \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{3\sqrt{10}}{10}} = \frac{1}{3}.$$

**76.**  $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \quad (\sin \alpha > 0 \text{ e } \cos \alpha > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

Como  $\alpha$  é um ângulo agudo, então  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**77.**

a) 
$$\frac{\sin(\pi - x) - 2 \sin^3 x}{2 \cos^3 x - \cos(-x)} =$$

$$= \frac{\sin x - 2 \sin^3 x}{2 \cos^3 x - \cos x}$$

$$= \frac{\sin x (1 - 2 \sin^2 x)}{\cos x (2 \cos^2 x - 1)} =$$

$$= \operatorname{tg} x \frac{1 - \sin^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \cos^2 x - 1} =$$

$$= \operatorname{tg} x \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x$$

b) 
$$\frac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2(-x)} - \frac{2}{\operatorname{tg}(-x)}}{1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} =$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{2}{\operatorname{tg} x}}{1 + 2 \sin x \cos x} =$$

$$= \frac{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{2 \cos x}{\sin x}}{1 + 2 \sin x \cos x} =$$

$$= \frac{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}{\sin^2 x}}{1 + 2 \sin x \cos x} =$$

$$= \frac{1 + 2 \sin x \cos x}{(1 + 2 \sin x \cos x) \sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x}$$

**78.**

a) Seja  $s$  a área do setor circular representado na figura.

$$\frac{s}{x} = \frac{3^2 \pi}{2\pi} \Leftrightarrow s = \frac{9}{2} x$$

Seja  $h$  a altura do triângulo  $[ABC]$  relativa ao vértice  $C$  e seja  $b = \overline{AB}$ .

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\frac{b}{2}}{3} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{b}{6} \Leftrightarrow b = 6 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{h}{3} \Leftrightarrow h = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Assim, a área da região sombreada é dada por:

$$\frac{9}{2} x - \frac{6 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \times 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2} =$$

$$= \frac{9}{2} x - 9 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

b) Seja  $c$  o comprimento do arco  $AB$ .

$$\frac{c}{x} = \frac{3 \times 2\pi}{2\pi} \Leftrightarrow c = 3x$$

Da alínea anterior vem que  $\overline{AB} = 6 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ .

Assim, o perímetro da região sombreada é dado por  $3x + 6 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ .

c) Se  $x = \frac{\pi}{2}$ , então a área da região sombreada é:

$$\frac{9}{2} \times \frac{\pi}{2} - 9 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{9\pi}{4} - 9 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9\pi - 18}{4}$$

**79.** A área do triângulo  $[OAB]$  é dada por:

$$\frac{\overline{OA} \times \sin x}{2} = \frac{\sin x}{2}$$

A área  $a$  do setor circular é dada por:

$$\frac{x}{a} = \frac{2\pi}{\pi} \Leftrightarrow a = \frac{x}{2}$$

Como a área do triângulo  $[OAB]$  é menor que a área do setor circular, tem-se:

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} \Leftrightarrow \sin x < x$$

Por outro lado, a área do triângulo  $[OAC]$  é dada por:

$$\frac{\overline{OA} \times \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Como a área do triângulo  $[OAC]$  é maior que a área do setor circular, tem-se  $\frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \Leftrightarrow x < \operatorname{tg} x$ .

Assim,  $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ .

**80.**

a)  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sin x + 1 = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow \sin x + 1 = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (2 \sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se  $k = 0$ , então  $x = 0 (\in [0, 2\pi])$  ou

$$x = \frac{7\pi}{6} (\in [0, 2\pi]) \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} (\in [0, 2\pi]).$$

Se  $k = 1$ , então  $x = \pi (\in [0, 2\pi])$  ou

$$x = \frac{19\pi}{6} (\notin [0, 2\pi]) \text{ ou } x = \frac{23\pi}{6} (\notin [0, 2\pi]).$$

Se  $k = 2$ , então  $x = 2\pi (\in [0, 2\pi])$  ou

$$x = \frac{31\pi}{6} (\notin [0, 2\pi]) \text{ ou } x = \frac{35\pi}{6} (\notin [0, 2\pi]).$$

Sendo  $x = 0$ , tem-se  $f(0) = \sin 0 + 1 = 0 + 1 = 1$ .

Sendo  $x = \pi$ , tem-se  $f(\pi) = \sin \pi + 1 = 0 + 1 = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Sendo } x = \frac{7\pi}{6}, \text{ tem-se } f\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) + 1 = \\ &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sendo } x = \frac{11\pi}{6}, \text{ tem-se } f\left(\frac{11\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) + 1 = \\ &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sendo  $x = 2\pi$ , tem-se  $f(2\pi) = \sin 2\pi + 1 = 0 + 1 = 1$ .

Assim, as coordenadas dos pontos de interseção dos dois gráficos são:

$$(0, 1), (\pi, 1), \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{11\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), (2\pi, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (f \times g)(x) = 0 &\Leftrightarrow (\sin x + 1)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x + 1 = 0 \vee \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x = -1 \vee \cos x = \sin x \vee \cos x = -\sin x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Assim, em  $[0, 2\pi]$ , as soluções desta equação são:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \text{ e } \frac{7\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) = g(x) + 1 &\Leftrightarrow \sin x + 1 = \cos^2 x - \sin^2 x + 1 \\ &\Leftrightarrow \sin x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \\ &\Leftrightarrow \sin x = -1 \vee \sin x = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ &\quad \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Assim, em  $[0, 2\pi]$ , as soluções desta equação são:

$$\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \text{ e } \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Se } x = \frac{3\pi}{2}, \text{ então } f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$\text{e } g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1,$$

obtendo-se o par  $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$  e  $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ .

$$\text{Se } x = \frac{\pi}{6}, \text{ então } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \text{ e}$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \text{ obtendo-}$$

se o par  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$  e  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$ .

$$\text{Se } x = \frac{5\pi}{6}, \text{ então } f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\text{e } g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

obtendo-se o par  $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$  e  $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$ .

$$\text{d) } f(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x + 1 > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x > -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x > \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$$

$$\text{81. } f(x+P) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \sin [2(x+P)] = \sin (2x)$$

$$\Leftrightarrow \sin (2x+2P) = \sin (2x)$$

$$\Leftrightarrow 2x+2P = 2x+2k\pi \vee \underbrace{2x+2P = \pi - 2x+2k\pi}_{\text{Não permite determinar } P}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2P = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow P = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo,  $f$  é uma função periódica de período positivo mínimo  $\pi$ .

**82.**

**a)** Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{r} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{d}{2}} \Leftrightarrow \frac{\cos \theta}{r} = \frac{2}{d}$$

$$\Leftrightarrow d = 2r \cos \theta$$

$$\text{b) Se } \overline{BP} = \overline{PC}, \text{ então } \widehat{AOP} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ e}$$

$$\theta = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Por outro lado, da alínea anterior,

$$d = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 3,70.$$

$$c) d = r \Leftrightarrow 2r \cos \theta = r \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}$$

Como  $\theta$  é um ângulo agudo, então  $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ .

O triângulo  $[AOP]$  é, portanto, um triângulo equilátero.

$$\begin{aligned} A_{[AOP]} &= \frac{r \times r \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \\ &= \frac{r^2}{2} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\ &= \frac{r^2}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{3}r^2}{4} \end{aligned}$$

$$d) \sqrt{3} = 2 \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como  $\theta$  é um ângulo agudo, então:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Se  $\theta = \frac{\pi}{6}$ , então  $\widehat{BOP} = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ .

Sendo  $c$  o comprimento do arco menor  $BP$ , tem-se:

$$\frac{c}{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi \times 1}{2\pi} \Leftrightarrow \frac{c}{\frac{\pi}{3}} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{\pi}{3}$$

e)

i)  $\widehat{OPQ} = \theta$  porque  $[PAO]$  é um triângulo isósceles e, num triângulo, a lados iguais opõem-se ângulos iguais.

$\widehat{QOP} = \frac{\pi}{2} - 2\theta$ , uma vez que  $\widehat{POB} = 2\theta$ , por  $POB$  se tratar do ângulo ao centro correspondente ao mesmo arco que o ângulo inscrito  $PAO$ .

$$\text{Assim, } \widehat{PQO} = \pi - \theta - \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \frac{\pi}{2} + \theta$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin \widehat{PQO}}{r} = \frac{\sin \widehat{OPQ}}{\overline{OQ}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{r} = \frac{\sin \theta}{\overline{OQ}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos \theta}{r} = \frac{\sin \theta}{\overline{OQ}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OQ} = \frac{r \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OQ} = r \operatorname{tg} \theta$$

Sendo  $h$  a altura do triângulo  $[OQP]$ , tem-se:

$$\begin{aligned} h &= |r \sin \widehat{QOP}| = \left| r \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \right| = |r \cos(2\theta)| = \\ &= r |\cos(2\theta)| \end{aligned}$$

Logo, a área do triângulo  $[OQP]$  é dada por:

$$\frac{r \operatorname{tg} \theta \times r |\cos(2\theta)|}{2} = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} \theta |\cos(2\theta)|.$$

$$ii) A(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} \theta |\cos(2\theta)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = 0 \vee \cos(2\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta = k\pi \vee 2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

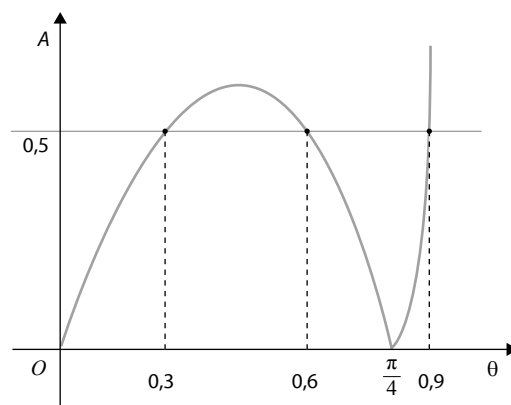
$$\Leftrightarrow \theta = k\pi \vee \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Uma vez que  $\theta$  é um ângulo agudo, tem-se que  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

Neste caso, obtém-se o triângulo isósceles e retângulo  $[AOC]$ .

$$iii) A(\theta) = \frac{1}{2} \times 2^2 \operatorname{tg} \theta |\cos(2\theta)| = 2 \operatorname{tg} \theta |\cos(2\theta)|$$

$$A(\theta) = 0,5$$



$$\theta \approx 0,3; \theta \approx 0,6; \theta \approx 0,9.$$

## Tema II - Geometria Analítica

### Unidade 1 - Declive e inclinação de uma reta do plano

Páginas 119 a 121

1.

a)  $y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -4$ : reta horizontal

Logo, a inclinação da reta é  $0^\circ$ .

b)  $(x, y) = (1, \pi) + k(-1, 0)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ : reta horizontal

Logo, a inclinação da reta é  $0^\circ$ .

c)  $x = 2$ : reta vertical

Logo, a inclinação da reta é  $90^\circ$ .

2. A reta  $r$  contém os pontos de coordenadas  $(0, 4)$  e  $(-2, 0)$ , logo:

$$m_r = \frac{4 - 0}{0 - (-2)} = 2 = \operatorname{tg} \alpha \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ onde } \alpha \text{ representa a inclinação da reta } r.$$

$$\text{Então, } \alpha = \operatorname{tg}^{-1}(2) \approx 63,4^\circ.$$

A reta  $s$  contém os pontos de coordenadas  $(0, 0)$  e  $(3, -1)$ , logo:

$$m_s = \frac{-1 - 0}{3 - 0} = -\frac{1}{3} = \operatorname{tg} \beta \wedge 0^\circ < \beta < 180^\circ, \text{ onde } \beta \text{ representa a inclinação da reta } s.$$

$$\text{Então, } \beta = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 161,6^\circ.$$

3.

a)  $m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

Assim, a equação da reta é do tipo  $y = \sqrt{3}x + b$ .

Como o ponto de coordenadas  $(1, 5)$  pertence à reta:

$$5 = \sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = 5 - \sqrt{3}$$

Logo,  $y = \sqrt{3}x + 5 - \sqrt{3}$  é a equação da reta pedida.

b)  $m = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$

Assim, a equação da reta é do tipo  $y = -x + b$ .

Como o ponto de coordenadas  $(2, 0)$  pertence à reta:

$$0 = -2 + b \Leftrightarrow b = 2$$

Logo,  $y = -x + 2$  é a equação da reta pedida.

4.

a)  $\operatorname{tg} \alpha = 1 \wedge 0 < \alpha < \pi$

$$\text{Logo, } \alpha = \operatorname{tg}^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

b)  $3x + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow 3y = -3x + 4$

$$\Leftrightarrow y = -x + \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -1 \wedge 0 < \alpha < \pi.$$

$$\text{Logo, } \alpha = \operatorname{tg}^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}.$$

c)  $m_t = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \wedge 0 < \alpha < \pi$$

$$\text{Logo, } \alpha = \operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

5. A reta  $r$  contém os pontos de coordenadas  $(0, 1)$  e  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ , logo:

$$m_r = \frac{1 - 0}{0 - \frac{1}{2}} = -2 = \operatorname{tg} \alpha \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ onde } \alpha \text{ representa a inclinação da reta } r.$$

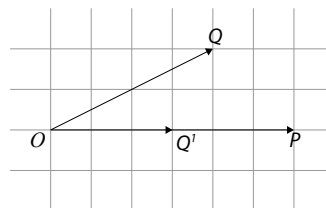
$$\text{Então, } \alpha = \operatorname{tg}^{-1}(-2) \approx 116,6^\circ.$$

## Unidade 2 - Produto escalar de vetores

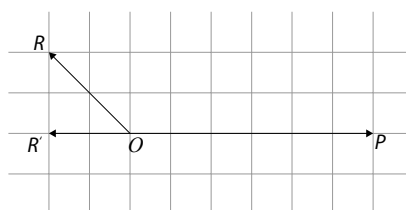
Páginas 122 a 142

6.

a)  $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = \overline{OP} \times \overline{OQ'} = 6 \times 4 = 24$

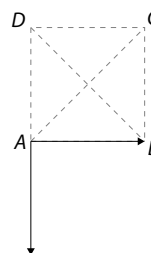


b)  $\vec{OP} \cdot \vec{OR} = -\overline{OP} \times \overline{OR'} = -6 \times 2 = -12$

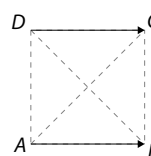


7.

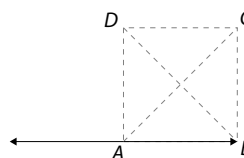
a)  $(\vec{AB}, \vec{DA}) = 90^\circ$



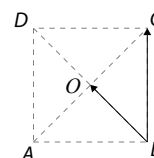
b)  $(\vec{AB}, \vec{DC}) = 0^\circ$



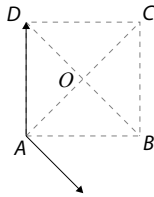
c)  $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 180^\circ$



d)  $(\vec{BC}, \vec{OD}) = 45^\circ$



e)  $(\vec{AD}, \vec{DO}) = 135^\circ$



8.

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$   
 $= 2 \times 3 \times \cos 30^\circ =$   
 $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

b)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$   
 $= 4 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$   
 $= 16 \times \frac{1}{2} = 8$

c)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$   
 $= 2018 \times 2018 \times \cos 90^\circ =$   
 $= 2018 \times 2018 \times 0 =$   
 $= 0$

9.

a)  $\vec{DE} \cdot \vec{DC} = \|\vec{DE}\| \|\vec{DC}\| \cos(\widehat{\vec{DE}, \vec{DC}}) =$   
 $= 1 \times 1 \times \cos 120^\circ = 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

b)  $\vec{BC} \cdot \vec{AD} = \|\vec{BC}\| \|\vec{AD}\| \cos(\widehat{\vec{BC}, \vec{AD}}) =$   
 $= 1 \times 2 \times \cos 0^\circ = 2 \times 1 = 2$

c)  $\vec{FA} \cdot \vec{AB} = \|\vec{FA}\| \|\vec{AB}\| \cos(\widehat{\vec{FA}, \vec{AB}}) =$   
 $= 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

d)  $\vec{AF} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AF}\| \|\vec{AC}\| \cos(\widehat{\vec{AF}, \vec{AC}}) =$   
 $= 1 \times \|\vec{AC}\| \times \cos 90^\circ = 1 \times \|\vec{AC}\| \times 0 = 0$

e)  $\vec{EA} \cdot \vec{AB} = \|\vec{EA}\| \|\vec{AB}\| \cos(\widehat{\vec{EA}, \vec{AB}}) =$   
 $= \|\vec{EA}\| \times 1 \times \cos 90^\circ = \|\vec{EA}\| \times 1 \times 0 = 0$

10.

a)  $\vec{AB} \cdot \vec{DC} = a \times a \times \cos(0^\circ) = a^2$

b)  $\vec{AB} \cdot \vec{GH} = a \times a \times \cos(180^\circ) = -a^2$

c)  $\vec{IJ} \cdot \vec{LD} = a \times 2a \times \cos(90^\circ) = 0$

d)  $\vec{AC} \cdot \vec{JL} = \|\vec{AC}\| \|\vec{JL}\| \cos(90^\circ) = 0$

e)  $\vec{IL} \cdot \vec{IK} = a \times a\sqrt{2} \times \cos(45^\circ) = a^2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

#### Cálculo auxiliar

$$\overline{IK}^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow \overline{IK}^2 = 2a^2, \text{ pelo que } \overline{IK} = \sqrt{2}a.$$

f)  $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = a \times a\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = a^2$

#### Cálculos auxiliares

$$\overline{AG}^2 = a^2 + (\sqrt{2}a)^2 \Leftrightarrow \overline{AG}^2 = 3a^2, \text{ pelo que } \overline{AG} = \sqrt{3}a.$$

$$\cos(\widehat{\vec{AB}, \vec{AG}}) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

g)  $\vec{AL} \cdot \vec{EF} = \sqrt{5}a \times a \times \cos(90^\circ) = 0$

h)  $\vec{LA} \cdot \vec{LH} = \sqrt{5}a \times a \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 2a^2$

#### Cálculos auxiliares

$$\overline{LA}^2 = a^2 + (2a)^2 \Leftrightarrow \overline{LA}^2 = 5a^2, \text{ pelo que } \overline{LA} = \sqrt{5}a.$$

$$\cos(\widehat{\vec{LA}, \vec{LH}}) = \frac{\overline{LD}}{\overline{LA}} = \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

11.

a) Por exemplo,  $\vec{AB}$  e  $\vec{AD}$ .

b) Por exemplo,  $\vec{AB}$  e  $\vec{DC}$ .

c) Por exemplo,  $\vec{AB}$  e  $\vec{CD}$ .

12.

a)  $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\frac{15}{2}}{5 \times \sqrt{3}} = \frac{15}{10\sqrt{3}} =$   
 $= \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} =$

Logo,  $(\vec{u}, \vec{v}) = 30^\circ$ .

b)  $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-2}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$

Logo,  $(\vec{u}, \vec{v}) = 120^\circ$ .

13.

a)  $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{5}}{3 \times 3} = \frac{\sqrt{5}}{9}$

Logo,  $(\vec{u}, \vec{v}) \approx 75,6^\circ$ .

ii)  $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-1}{7 \times \frac{1}{3}} = -\frac{3}{7}$

Logo,  $(\vec{u}, \vec{v}) \approx 115,4^\circ$ .

b)  $(\vec{u}, \vec{v}) \approx 180^\circ - 115,4^\circ \approx 64,6^\circ$

14.

a)  $(2\vec{u}) \cdot \vec{v} = 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 4 = 8$

b)  $(-5\vec{u}) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{v}\right) = -\frac{5}{2}\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{5}{2} \times 4 = -10$

c)  $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} = 4 + (-3) = 1$

15.

$$\text{a)} (6\vec{u}) \cdot \vec{v} = 6\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \times 2 \times 2 \times \cos 45^\circ = \frac{24\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

$$\text{b)} (2017\vec{w}) \cdot \left(-\frac{1}{3}\vec{v}\right) = -\frac{2017}{3}\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{c)} (\vec{u} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) + \vec{w} \cdot \vec{u} &= \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u} = \\ &= 2 \times 2 \times \cos 45^\circ + 0 - 3^2 \\ &= 2\sqrt{2} - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16. \vec{DA} \cdot \vec{BD} &= \vec{DA} \cdot (\vec{BA} + \vec{AD}) = \\ &= \vec{DA} \cdot \vec{BA} + \vec{DA} \cdot \vec{AD} = \\ &= 0 + k \times k \times \cos 180^\circ = \\ &= -k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17. \vec{AI} \cdot \vec{AJ} &= (\vec{AD} + \vec{DI}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BJ}) = \\ &= \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{BJ} + \vec{DI} \cdot \vec{AB} + \vec{DI} \cdot \vec{BJ} = \\ &= 0 + \|\vec{AB}\| \times \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| + \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AB}\| + 0 = \\ &= \frac{1}{2} \|\vec{AB}\|^2 + \frac{1}{2} \|\vec{AB}\|^2 = \\ &= \|\vec{AB}\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18. \vec{KC} \cdot \vec{DL} &= (\vec{KB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{DC} + \vec{CL}) = \\ &= \vec{KB} \cdot \vec{DC} + \vec{KB} \cdot \vec{CL} + \vec{BC} \cdot \vec{DC} + \vec{BC} \cdot \vec{CL} = \\ &= \frac{1}{4} \vec{AB} \cdot \vec{AB} + 0 + 0 + \vec{BC} \cdot \frac{1}{4} \vec{CB} = \\ &= \frac{1}{4} \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AB}\| \cos 0^\circ + \frac{1}{4} \|\vec{BC}\| \times \\ &\quad \times \|\vec{CB}\| \cos 180^\circ = \\ &= \frac{1}{4} \|\vec{AB}\|^2 - \frac{1}{4} \|\vec{BC}\|^2 = \\ &= \frac{1}{4} \|\vec{AB}\|^2 - \frac{1}{4} \|\vec{AB}\|^2 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, uma vez que os vetores  $\vec{KC}$  e  $\vec{DL}$  são perpendiculares, então as retas  $KC$  e  $DL$  são perpendiculares.

19.

$$\text{a)} \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times \sqrt{8} + 7 \times 0 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} + 0 = \sqrt{2}$$

$$\text{b)} \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-6) + 1 \times 3 = -12 + 3 = -9$$

$$\text{c)} \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-10) + (-2) \times (-15) = -30 + 30 = 0$$

20.

a) Uma vez que  $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ , o ângulo formado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é agudo.

b) Uma vez que  $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ , o ângulo formado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é obtuso.

c) Uma vez que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , o ângulo formado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é reto.

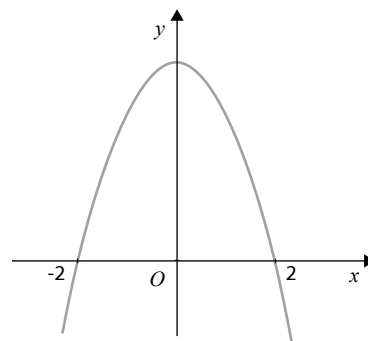
21.

$$\begin{aligned} \text{a)} \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \wedge k \neq \frac{3}{2} &\Leftrightarrow 2 \times 3 + (-4) \times k < 0 \wedge k \neq \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow 6 - 4k < 0 \wedge k \neq \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow 4k > 6 \wedge k \neq \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow k > \frac{3}{2} \wedge k \neq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } k \in \left] \frac{3}{2}, +\infty \right[.$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 &\Leftrightarrow (k-1) \times 2 + 3 \times k = 0 \\ &\Leftrightarrow 2k - 2 + 3k = 0 \\ &\Leftrightarrow k = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \wedge k \neq 0 &\Leftrightarrow 2 \times 2 + k \times (-k) > 0 \wedge k \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 4 - k^2 > 0 \wedge k \neq 0 \end{aligned}$$



$$\text{Logo, } k \in ]-2, 2[ \setminus \{0\}.$$

22.

$$\text{a)} \vec{AB} = (3, 4) - (1, -2) = (2, 6)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 2 \times (-2) + 6 \times 5 = -4 + 30 = 26$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \vec{u} \cdot (\vec{BA} - 3\vec{u}) &= \vec{u} \cdot \vec{BA} - 3\vec{u} \cdot \vec{u} = \\ &= -\vec{u} \cdot \vec{AB} - 3\|\vec{u}\|^2 = \\ &= -26 - 3 \times (\sqrt{29})^2 = -113 \end{aligned}$$

**Cálculo auxiliar**

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

23.

$$\text{a)} \|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-1) + 1 \times 3 = -2 + 3 = 1$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}}$$

$$\text{Logo, } (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 81,9^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \|\vec{u}\| &= \sqrt{(-4)^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65} \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{2^2 + 0^2} = 2 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= -4 \times 2 + 7 \times 0 = -8 \\ \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-8}{\sqrt{65} \times 2} \\ \text{Logo, } (\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) &\approx 119,7^\circ \end{aligned}$$

**24.**

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{a} \cdot \vec{b} &= 4 \times (-1) + (-1) \times 4 = -4 - 4 = -8 \\ \text{Logo, os vetores } \vec{a} \text{ e } \vec{b} &\text{ não são perpendiculares.} \\ \text{b) } \vec{c} \cdot \vec{d} &= 0 \times \sqrt{2} + 3 \times 0 = 0 + 0 = 0 \\ \text{Logo, os vetores } \vec{c} \text{ e } \vec{d} &\text{ são perpendiculares.} \\ \text{c) } \vec{e} \cdot \vec{f} &= 2 \times 6 + (-3) \times 4 = 12 - 12 = 0 \\ \text{Logo, os vetores } \vec{e} \text{ e } \vec{f} &\text{ são perpendiculares.} \end{aligned}$$

**25.**

$$\begin{aligned} \text{a) Por exemplo, } &(-5, 2), (5, -2), (10, -4). \\ \text{b) Por exemplo, } &(6, 1), (-6, -1), (12, 2). \\ \text{c) Por exemplo, } &(0, -4), (0, 1), (0, 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{26. } \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \Leftrightarrow (-1, 2) \cdot (x, y) = 0 \\ &\Leftrightarrow -x + 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2y \\ \|\vec{v}\| &= 2 \Leftrightarrow \sqrt{(2y)^2 + y^2} = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{5}y = 2 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Assim, o vetor pedido é } \vec{v} \left( \frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right).$$

$$\text{27. } ax - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = ax - 2, \text{ pelo que o declive desta reta é } a.$$

O declive da reta definida por

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 5 - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \text{ é } -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Logo, } a = \frac{2}{3}.$$

Logo, a opção correta é a (D).

**28.**

$$\begin{aligned} \text{a) A equação da reta pretendida é da forma} \\ y &= -\frac{3}{2}x + b. \\ \text{Como o ponto A pertence a esta reta:} \\ 5 &= -\frac{3}{2} \times 3 + b \Leftrightarrow b = \frac{19}{2} \\ \text{Logo, } y &= -\frac{3}{2}x + \frac{19}{2} \text{ é a equação pedida.} \end{aligned}$$

$$\text{b) } x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = x - 2$$

A equação da reta pretendida é da forma  $y = -x + b$ .  
Como o ponto A pertence a esta reta:

$$5 = -3 + b \Leftrightarrow b = 8$$

Logo,  $y = -x + 8$  é a equação pedida.

$$\text{c) A reta definida por } (x, y) = (1, 10) + k(-2, 6), k \in \mathbb{R} \text{ tem declive } \frac{6}{-2} = -3.$$

A equação da reta pretendida é da forma  $y = \frac{1}{3}x + b$ .

Como o ponto A pertence a esta reta:

$$5 = \frac{1}{3} \times 3 + b \Leftrightarrow b = 4$$

Logo,  $y = \frac{1}{3}x + 4$  é a equação pedida.

$$\text{d) A reta de equação } x = 1 \text{ é uma reta vertical, pelo que uma reta que lhe seja perpendicular é da forma } y = b. \text{ Como o ponto A pertence a essa reta, então } y = 5 \text{ é a equação da reta pedida.}$$

$$\text{e) A reta de equação } y = 0 \text{ é uma reta horizontal, pelo que uma reta que lhe seja perpendicular é da forma } x = a. \text{ Como o ponto A pertence a essa reta, então } x = 3 \text{ é a equação da reta pedida.}$$

**29.**

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= C + \vec{BC} = (0, 2) + ((0, 2) - (3, 0)) = \\ &= (0, 2) + (-3, 2) = (-3, 4) \end{aligned}$$

$$\vec{AB} = 2\vec{BC} = 2(-3, 2) = (-6, 4)$$

$$m_{AC} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

Assim, a equação da reta  $t$  é da forma  $y = \frac{3}{2}x + b$ .

Como o ponto A pertence a esta reta:

$$4 = \frac{3}{2} \times (-3) + b \Leftrightarrow b = \frac{17}{2}$$

Logo,  $y = \frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$  é a equação pedida.

$$\text{b) } m_t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \text{tg } \alpha = \frac{3}{2}$$

$$\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$$

Logo,  $\alpha \approx 56,3^\circ$ .

$$\begin{aligned} \text{c) A bissetriz dos quadrantes pares tem como vetor diretor, por exemplo, o vetor de coordenadas } (1, -1). \\ \text{Um vetor diretor da reta } t \text{ pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas } (2, 3). \end{aligned}$$

$$\|(1, -1)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\|(2, 3)\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$(1, -1) \cdot (2, 3) = 2 - 3 = -1$$



Assim, sendo  $\alpha$  o ângulo pedido,

$$\cos \alpha = \frac{|-1|}{\sqrt{2} \times \sqrt{13}}, \text{ pelo que}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right) \approx 1,4 \text{ rad.}$$

**30.**

**a)**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times 10 + (-3) \times (-1) + 9 \times (-2) = 5 + 3 - 18 = -10$

O ângulo formado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é obtuso, já que  $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ .

**b)**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times 10 + 2 \times 0 + 5 \times (-1) = 5 + 0 - 5 = 0$

O ângulo formado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é reto, já que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

**c)**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\sqrt{3} \times 0 + (-2) \times 0 + 4 \times \sqrt{5} = 0 + 0 + 4\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

O ângulo formado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é agudo, já que  $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ .

**31.**

**a)**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times (-1) + (-1) \times 3 + 1 \times 7 = -4 - 3 + 7 = 0$

Logo, os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são perpendiculares.

**b)**  $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \times \sqrt{2} + 4 \times 0 + 3 \times \frac{1}{2} = 0 + 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

Logo, os vetores  $\vec{c}$  e  $\vec{d}$  não são perpendiculares.

**32.**

**a)** Por exemplo,  $(0, -5, -1)$ ,  $(5, 0, 4)$ ,  $(1, -4, 0)$ .

**b)** Por exemplo,  $(-7, 0, \sqrt{2})$ ,  $(0, -7, 3)$ ,  $(3, -\sqrt{2}, 0)$ .

**33.**  $(a, b, c) \cdot (0, c, -b) = 0 + bc - bc = 0$ , logo os vetores  $\vec{u}(a, b, c)$  e  $(0, c, -b)$  são perpendiculares.

$(a, b, c) \cdot (c, 0, -a) = ac + 0 - ac = 0$ , logo os vetores  $\vec{u}(a, b, c)$  e  $(c, 0, -a)$  são perpendiculares.

$(a, b, c) \cdot (b, -a, 0) = ab - ab + 0 = 0$ , logo os vetores  $\vec{u}(a, b, c)$  e  $(b, -a, 0)$  são perpendiculares.

**34.** Seja  $M$  o ponto médio de  $[AB]$ .

**a)**  $M = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (-1, 1)$

$$\vec{AB} = (1, 0) - (-3, 2) = (4, -2)$$

$$\vec{MP} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow (x+1, y-1) \cdot (4, -2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4 - 2y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y = 4x + 6$$

$$\Leftrightarrow y = 2x + 3, \text{ que é a equação pedida.}$$

**b)**  $M = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{7+5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 6\right)$

$$\vec{AB} = (4, 5) - (1, 7) = (3, -2)$$

$$\vec{MP} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}, y - 6\right) \cdot (3, -2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{15}{2} - 2y + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y = 3x + \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}, \text{ que é a equação pedida.}$$

**35.**  $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1, y-3) \cdot (x-2, y-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) + (y-3)(y-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + x - 2 + y^2 - 5y - 3y + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - 8y = -13$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - 8y + 16 = -13 + \frac{1}{4} + 16$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-4)^2 = \frac{13}{4}, \text{ que é a equação pedida.}$$

**36.**  $\vec{CT} \cdot \vec{TP} = 0 \Leftrightarrow (-2-2, 1-(-1)) \cdot (x-2, y+1) = 0$

$$\Leftrightarrow (-4, 2) \cdot (x-2, y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 8 + 2y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y = 4x - 10$$

$$\Leftrightarrow y = 2x - 5, \text{ que é a equação pedida.}$$

**37.**

**a)** O lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  do plano tais que  $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$  é a circunferência de diâmetro  $[AB]$ :

$$(x+3, y-4) \cdot (x, y+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + y^2 + 2y - 4y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + y^2 - 2y = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} + y^2 - 2y + 1 = 8 + \frac{9}{4} + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{45}{4}$$

Ou seja, a circunferência de centro  $C\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$  e raio igual a  $\frac{\sqrt{45}}{2}$ .

**b)** O lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  do plano tais que  $\vec{AB} \cdot \vec{MP} = 0$ , onde  $M$  é o ponto médio de  $[AB]$ , é a mediatriz do segmento de reta  $[AB]$ :

#### Cálculos auxiliares

$$\vec{AB} = (0, -2) - (-3, 4) = (3, -6)$$

$$M = \left(\frac{-3+0}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

$$(3, -6) \cdot \left(x + \frac{3}{2}, y - 1\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{9}{2} - 6y + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6y = 3x + \frac{21}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$$

c) O lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  do plano tais que  $\vec{AB} \cdot \vec{BP} = 0$  é a reta tangente à circunferência de centro  $A$  no ponto  $B$  ou é a reta perpendicular à reta  $AB$  que passa no ponto  $B$ :

$$\begin{aligned}(3, -6) \cdot (x, y + 2) &= 0 \Leftrightarrow 3x - 6y - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6y = 3x - 12 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 2\end{aligned}$$

38.

a)  $M = \left( \frac{-2+3}{2}, \frac{5-1}{2} \right) = \left( \frac{1}{2}, 2 \right)$

$$\vec{AB} = (3, -1) - (-2, 5) = (5, -6)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{MP} = 0 \Leftrightarrow (5, -6) \cdot \left( x - \frac{1}{2}, y - 2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - \frac{5}{2} - 6y + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6y = 5x + \frac{19}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5}{6}x + \frac{19}{12}, \text{ que é a equação pedida.}$$

b)  $\vec{CA} = (-2, 5) - (1, 1) = (-3, 4)$

$$\vec{CA} \cdot \vec{AP} = 0 \Leftrightarrow (-3, 4) \cdot (x + 2, y - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x - 6 + 4y - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4y = 3x + 26$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{13}{2}, \text{ que é a equação pe-}$$

dida.

39.

a)  $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0 \Leftrightarrow (x - 0, y - 1) \cdot (x - 6, y - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 5y - y + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 6y = -5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = -5 + 9 + 9$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 13, \text{ que é a equa-}$$

ção pedida.

b)  $C$  e  $D$  são pontos da forma  $(x, 0)$ , uma vez que pertencem ao eixo das abscissas.

Substituindo na equação da circunferência de diâmetro  $[AB]$ :

$$(x - 3)^2 + (0 - 3)^2 = 13 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = -2 \vee x - 3 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$$

Assim,  $C(1, 0)$  e  $D(5, 0)$ .

c) Seja  $M$  o centro da circunferência de diâmetro  $[AB]$ ;  $M(3, 3)$

$$\vec{MC} \cdot \vec{CP} = 0 \Leftrightarrow (1 - 3, 0 - 3) \cdot (x - 1, y - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2, -3) \cdot (x - 1, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2 - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y = -2x + 2$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}, \text{ que é a equação re-}$$

duzida da reta tangente à circunferência de diâmetro  $[AB]$  em  $C$ .

$$\vec{MD} \cdot \vec{DP} = 0 \Leftrightarrow (5 - 3, 0 - 3) \cdot (x - 5, y - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2, -3) \cdot (x - 5, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 10 - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y = 2x - 10$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}, \text{ que é a equação re-}$$

duzida da reta tangente à circunferência de diâmetro  $[AB]$  em  $D$ .

d)

i)  $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 \geq 13 \wedge y \geq -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \wedge$

$$\wedge y \geq \frac{2}{3}x - \frac{10}{3} \wedge y \leq 0$$

ii) Seja  $I$  o ponto interseção das retas tangentes à circunferência de diâmetro  $[AB]$  em  $C$  e  $D$ .

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 4x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{3} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Então, } I\left(3, -\frac{4}{3}\right).$$

Seja  $M$  o centro da circunferência de diâmetro  $[AB]$ ;  $M(3, 3)$

$$\overline{IM} = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$$

Por outro lado,  $\overline{CD} = 4$ .

A área do losango  $[CIDM]$  é então:

$$\frac{\frac{13}{3} \times 4}{2} = \frac{26}{3}$$

Um vetor diretor da reta tangente à circunferência no ponto  $C$  é  $(3, 2)$  e um vetor diretor da reta tangente à circunferência no ponto  $D$  é, por exemplo,  $(-3, 2)$ .

$$\|(3, 2)\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = \|(-3, 2)\|$$

$$(3, 2) \cdot (-3, 2) = -9 + 4 = -5$$

Assim, o ângulo formado pelas duas retas é dado por:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|-5|}{\sqrt{13} \times \sqrt{13}}\right) \approx 67,380^\circ$$

Pelo que, a área  $a$  do setor circular de centro  $M$  e arco  $BD$  é dada por:

$$\frac{13\pi}{360^\circ} = \frac{a}{67,380^\circ}$$

Ou seja,  $a \approx 7,644$ .

Logo, a área da região sombreada é, aproximadamente,  $\frac{26}{3} - 7,644 \approx 1,02$ .

## Unidade 3 - Equações de planos no espaço

Páginas 143 a 164

40. Um vetor normal ao plano dado é  $(1, -2, 0)$ .

Um vetor diretor da reta definida na opção A é  $(3, 2, 1)$ . Ora, este vetor não é colinear com o vetor normal ao plano, pelo que esta reta não é perpendicular ao plano dado.

Um vetor diretor da reta definida na opção B é  $(0, 0, 1)$ . Ora, este vetor não é colinear com o vetor normal ao plano, pelo que esta reta não é perpendicular ao plano dado.

Um vetor diretor da reta definida na opção C é  $(1, -2, 0)$ . Ora, este vetor é colinear com o vetor normal ao plano, pelo que esta reta é perpendicular ao plano dado.

Um vetor diretor da reta definida na opção D é  $(3, 0, 1)$ . Ora, este vetor não é colinear com o vetor normal ao plano, pelo que esta reta não é perpendicular ao plano dado.

Assim, a opção correta é a (C).

41.

a) Por observação da condição dada, obtém-se o vetor normal ao plano  $\vec{n}_\alpha(-2, 1, 3)$  e o ponto  $P_1\left(1, -\frac{1}{2}, 2\right)$ .

Se, por exemplo,  $x = 0$  e  $y = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} -2(0 - 1) + \left(0 + \frac{1}{2}\right) - 3(2 - z) = 0 &\Leftrightarrow 2 + \frac{1}{2} - 6 + 3z = 0 \\ &\Leftrightarrow 3z = \frac{7}{2} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Obtém-se o ponto  $P_2\left(0, 0, \frac{7}{6}\right)$ .

b) Por observação da condição dada, obtém-se o vetor normal ao plano  $\vec{n}_\beta\left(-1, 1, \frac{1}{4}\right)$  e o ponto  $P_1(-2, 0, 2)$ .

Se, por exemplo,  $y = 0$  e  $z = 0$ , tem-se:

$$-(x + 2) + 0 = -\frac{1}{4}(0 - 2) \Leftrightarrow -x - 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Obtém-se o ponto  $P_2\left(-\frac{5}{2}, 0, 0\right)$ .

c) Por observação da condição dada, obtém-se o vetor normal ao plano  $\vec{n}_\gamma\left(1, 2, \frac{1}{3}\right)$ .

Se, por exemplo,  $x = 0$  e  $y = 0$ , tem-se:

$$0 + 0 + \frac{z}{3} = 5 \Leftrightarrow z = 15$$

Obtém-se o ponto  $P_1(0, 0, 15)$ .

Se, por exemplo,  $x = 1$  e  $y = 1$ , tem-se:

$$1 + 2 + \frac{z}{3} = 5 \Leftrightarrow z = 6$$

Obtém-se o ponto  $P_2(1, 1, 6)$ .

d) Por observação da condição dada, obtém-se o vetor normal ao plano  $\vec{n}_\delta(3, 0, 2)$ .

Se, por exemplo,  $x = 0$  e  $y = 100$ , tem-se:

$$0 + 2z = -1 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}$$

Obtém-se o ponto  $P_1\left(0, 100, -\frac{1}{2}\right)$ .

Se, por exemplo,  $z = 0$  e  $y = 2017$ , tem-se:

$$3x + 0 = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Obtém-se o ponto  $P_2\left(-\frac{1}{3}, 2017, 0\right)$ .

42.

a)  $2(x + 1) - 1(y - 1) + 3(z - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x + 2 - y + 1 + 3z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y + 3z - 3 = 0, \text{ que é a equação pedida.}$$

b)  $1(y - 3) + 2(z - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow y - 3 + 2z - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y + 2z - 7 = 0, \text{ que é a equação pedida.}$$

c)  $-2(x + 2) + 5(z - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow -2x - 4 + 5z - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 5z - 14 = 0, \text{ que é a equação pedida.}$$

d)  $-3(x + 1) + 4(y + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow -3x - 3 + 4y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 4y + 1 = 0, \text{ que é a equação pedida.}$$

e)  $5(x - 3) = 0 \Leftrightarrow 5x - 15 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 3, \text{ que é a equação pedida.}$$

43.

a) Um vetor diretor da reta definida por  $x = -4 \wedge y = 5$  é  $(0, 0, 1)$ , pois a reta é paralela ao eixo  $Oz$ . Como a reta é perpendicular ao plano  $\alpha$ , então este vetor é normal ao plano  $\alpha$ .

Assim:

$$z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -1$$

Logo,  $z = -1$  é uma equação cartesiana do plano  $\alpha$ .

b) Um vetor diretor da reta definida por  $y = 21 \wedge z = -10$  é  $(1, 0, 0)$ , pois a reta é paralela ao eixo  $Ox$ . Como a reta é perpendicular ao plano  $\alpha$ , então este vetor é normal ao plano  $\alpha$ .

Assim:

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Logo,  $x = 1$  é uma equação cartesiana do plano  $\alpha$ .

c) Um vetor diretor da reta definida por  $x = -1 \wedge z = 0$  é  $(0, 1, 0)$ , pois a reta é paralela ao eixo  $Oy$ . Como a reta é perpendicular ao plano  $\alpha$ , então este vetor é normal ao plano  $\alpha$ .

Assim:

$$y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3$$

Logo,  $y = 3$  é uma equação cartesiana do plano  $\alpha$ .

44.

a) Por exemplo,  $\vec{a}$  (0, 1, 1),  $\vec{b}$  (1, 0, -2) e  $\vec{c}$  (1, 2, 0).

b) Seja  $\vec{u}$  (a, b, c) um vetor não nulo.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 0, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 1, -1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = 0 \\ -2a + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ 4c + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = -3c \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}$  (-2c, -3c, c),  $c \in \mathbb{R}$ .

Por exemplo, se  $c = 1$ , obtém-se  $\vec{u}$  (-2, -3, 1).

45.

a)  $\vec{AB} = (3, 2, 5) - (3, 4, 5) = (0, -2, 0)$

$$\vec{BC} = (1, 2, 3) - (3, 2, 5) = (-2, 0, -2)$$

Seja  $\vec{u}$  (a, b, c) um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{BC}$ .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{BC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, -2, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 0, -2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b = 0 \\ -2a - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -c \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}$  (-c, 0, c),  $c \in \mathbb{R}$ .

Por exemplo, se  $c = 1$ , obtém-se  $\vec{u}$  (-1, 0, 1).

Então,  $\vec{u}$  (-1, 0, 1) é um vetor normal ao plano e  $A(3, 4, 5)$  é um ponto do plano:

$$-1(x - 3) + 0(y - 4) + 1(z - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + 3 + z - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + z - 2 = 0$$

b)  $\vec{AB} = (0, 2, 1) - (-1, 2, 0) = (1, 0, 1)$

$$\vec{CA} = (-1, 2, 0) - (1, 1, 1) = (-2, 1, -1)$$

Seja  $\vec{u}$  (a, b, c) um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{CA}$ .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 0, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 1, -1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ -2a + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ 2c + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = -c \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}$  (-c, -c, c),  $c \in \mathbb{R}$ .

Por exemplo, se  $c = 1$ , obtém-se  $\vec{u}$  (-1, -1, 1).

Então,  $\vec{u}$  (-1, -1, 1) é um vetor normal ao plano e

$A(-1, 2, 0)$  é um ponto do plano:

$$-1(x + 1) - 1(y - 2) + 1(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x - 1 - y + 2 + z = 0$$

$$\Leftrightarrow -x - y + z + 1 = 0$$

c)  $\vec{AB} = (2, -1, 2) - (0, 1, 3) = (2, -2, -1)$

$$\vec{BC} = (1, 2, 0) - (2, -1, 2) = (-1, 3, -2)$$

Seja  $\vec{u}$  (a, b, c) um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{BC}$ .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{BC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, -2, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 3, -2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2b - c = 0 \\ -a + 3b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a - 2b \\ -a + 3b - 4a + 4b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 5a = 7b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{14}{5}b - 2b \\ a = \frac{7}{5}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{4}{5}b \\ a = \frac{7}{5}b \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}$   $\left(\frac{7}{5}b, b, \frac{4}{5}b\right)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

Por exemplo, se  $b = 5$ , obtém-se  $\vec{u}$  (7, 5, 4).

Então,  $\vec{u}$  (7, 5, 4) é um vetor normal ao plano e

$A(0, 1, 3)$  é um ponto do plano:

$$7(x - 0) + 5(y - 1) + 4(z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x + 5y - 5 + 4z - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x + 5y + 4z - 17 = 0$$

46.

a)  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 0)^2$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 =$$

$$= x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4y - 2z - 2 = 0$$

$\Leftrightarrow x - 2y - z - 1 = 0$ , que é uma equação cartesiana do plano mediador de  $[AB]$ .

b)  $\vec{AB} = (2, -1, 0) - (1, 1, 1) = (1, -2, -1)$

$$\vec{BC} = (0, 2, -3) - (2, -1, 0) = (-2, 3, -3)$$

$\frac{1}{-2} \neq \frac{-2}{3} \neq \frac{-1}{-3}$ , logo os vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{BC}$  não são colineares e, portanto, os pontos A, B e C não são colineares.

47.

a)  $\vec{r}$  (1, 1, -1)

$$\vec{s}$$
 (0, 0, 1)

$\vec{r}$  e  $\vec{s}$  são vetores diretores das retas r e s, respectivamente.

Uma vez que a abcissa e a ordenada de  $\vec{s}$  são 0 e as de  $\vec{r}$  não são, então os vetores não são colineares.

Além disso, os pontos da reta  $s$  são da forma  $(0, 1, z)$ , sendo  $z$  um número real.

$$(0, 1, z) = (-1, 0, 2) + k(1, 1, -1) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -1 + k \\ 1 = 0 + k \\ z = 2 - k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \\ z = 2 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Assim, o ponto  $(0, 1, 1)$  pertence às duas retas, logo, concluímos que as retas são concorrentes.

- b)** Seja  $\vec{n}(a, b, c)$  um vetor normal ao plano definido pelas retas  $r$  e  $s$ :

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 0, 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = 0 \end{cases}$$

Assim,  $\vec{n}(-b, b, 0)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

Por exemplo, se  $b = 1$ , obtém-se  $\vec{n}(-1, 1, 0)$ .

Uma equação cartesiana do plano é:

$$-(x-0) + (y-1) = 0 \Leftrightarrow -x + y - 1 = 0$$

#### 48.

- a)** Sejam  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  vetores diretores das retas  $r$  e  $s$ , respectivamente.

$$\vec{r}(-2, 0, 0)$$

$$\vec{s}(1, 0, 0)$$

Tem-se que  $\vec{r} = -2\vec{s}$ , ou seja, os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  são colineares, logo as retas  $r$  e  $s$  são paralelas ou coincidentes.

$(3, 1, 2)$  é um ponto da reta  $r$  mas não é um ponto da reta  $s$ , pois os pontos da reta  $s$  são da forma  $(x, 2, 1)$ , sendo  $x$  um número real.

Assim, as retas  $r$  e  $s$  são estritamente paralelas, logo definem um plano.

- b)** Seja  $A(3, 1, 2)$  um ponto da reta  $r$  e seja  $B(1, 2, 1)$  um ponto da reta  $s$ .

$$\vec{AB} = (1, 2, 1) - (3, 1, 2) = (-2, 1, -1)$$

Este vetor é paralelo ao plano definido pelas retas  $r$  e  $s$  e não é colinear com  $\vec{r}(-2, 0, 0)$ .

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{r}$ .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-2, 1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 0, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b - c = 0 \\ -2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ a = 0 \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}(0, b, b)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

Por exemplo, se  $b = 1$ , obtém-se  $\vec{u}(0, 1, 1)$ .

Então,  $\vec{u}(0, 1, 1)$  é um vetor normal ao plano e

$A(3, 1, 2)$  é um ponto do plano:

$$0(x-3) + 1(y-1) + 1(z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y - 1 + z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y + z - 3 = 0, \text{ que é a equação pedida.}$$

#### 49.

- a)** Substituindo  $x$ ,  $y$  e  $z$  na equação da reta  $r$  pelas coordenadas do ponto  $A$ , vem:

$$\begin{cases} -3 = 1 + 3k \\ 2 = 2k \\ 0 = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{4}{3} \\ k = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

que é uma condição impossível.

Logo, o ponto  $A$  é exterior à reta  $r$ .

Assim, a reta  $r$  e o ponto  $A$  definem um plano.

- b)** Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(3, 2, -1)$ .

O ponto  $B(1, 0, 1)$  é um ponto da reta  $r$ .

$$\vec{AB} = (1, 0, 1) - (-3, 2, 0) = (4, -2, 1)$$

Este vetor é paralelo ao plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $A$  e não é colinear com  $\vec{r}$ .

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{r}$ .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (4, -2, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (3, 2, -1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -4a + 2b \\ 3a + 2b + 4a - 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 7a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b \\ a = 0 \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}(0, b, 2b)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

Por exemplo, se  $b = 1$ , obtém-se  $\vec{u}(0, 1, 2)$ .

Então,  $\vec{u}(0, 1, 2)$  é um vetor normal ao plano e  $A(-3, 2, 0)$  é um ponto do plano:

$$0(x+3) + 1(y-2) + 2(z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow y - 2 + 2z = 0$$

$$\Leftrightarrow y + 2z - 2 = 0, \text{ que é a equação pedida.}$$

#### 50.

- a)**  $(x, y, z) = (-\sqrt{2}, 3, 1) + s(-1, 1, -2) + t(3, 2, 5)$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$  é a equação pedida.

- b)** Se  $x = 0$  e  $y = 0$ , então  $z = 5$ , e obtém-se o ponto  $A(0, 0, 5)$  pertencente ao plano.

Se  $x = 0$  e  $z = 0$ , então  $y = 5$ , e obtém-se o ponto  $B(0, 5, 0)$  pertencente ao plano.

Se  $y = 0$  e  $z = 0$ , então  $x = 5$ , e obtém-se o ponto  $C(5, 0, 0)$  pertencente ao plano.

Então:

$$\vec{AB} = (0, 5, 0) - (0, 0, 5) = (0, 5, -5)$$

$$\vec{BC} = (5, 0, 0) - (0, 5, 0) = (5, -5, 0)$$

$\vec{AB}$  e  $\vec{BC}$  são vetores paralelos ao plano.

Logo,  $(x, y, z) = (0, 0, 5) + s(0, 5, -5) + t(5, -5, 0)$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$  é a equação pedida.

**51.**

$$\text{a) } \begin{cases} x = -\sqrt{2} - s + 3t \\ y = 3 + s + 2t, \quad s, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 2s + 5t \end{cases}$$

**b)** Usando os pontos  $A, B$  e  $C$  e os vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{BC}$  do exercício anterior, obtém-se:

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = 5s - 5t, \quad s, t \in \mathbb{R} \\ z = 5 - 5s \end{cases}$$

**52.**  $IJK: x + y + z = 2$

Uma vez que o centro do cubo é a origem do referencial e que o ponto  $K$  pertence ao plano  $xOy$ , então  $K(x, x, 0)$ , sendo  $x$  um número real.

Como  $K$  pertence ao plano  $IJK$ , então  $x + x + 0 = 2 \Leftrightarrow x = 1$ .

Logo,  $K(1, 1, 0)$ . Conclui-se também que a aresta do cubo é 2 e que  $D(1, -1, 1)$ .

Assim, o plano paralelo a  $IJK$  e que passa em  $D$  é da forma  $x + y + z = d$ .

Como  $D$  pertence a esse plano:

$$1 - 1 + 1 = d \Leftrightarrow d = 1$$

A equação pedida é  $x + y + z = 1$ .

**53.** Um vetor normal ao plano  $\alpha$  é  $(1, -2, 1)$ . Um plano que seja paralelo a  $\alpha$  terá como vetor normal um vetor colinear com este, o que apenas acontece na opção (B), em que um vetor normal ao plano indicado é  $(-2, 4, -2)$ .

Assim, a opção correta é a (B).

**54.** Para que os dois planos sejam perpendiculares têm de ter vetores normais perpendiculares.

Assim:

$$(2, 4, -1) \cdot (2, k - 1, -1) = 0 \Leftrightarrow 4 + 4k - 4 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$$

**55.** Seja  $M$  o ponto médio de  $[AB]$ .

$$\text{a) } M = \left( \frac{-3+1}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (-1, 1, 1)$$

$$\vec{AB} = (1, 0, 2) - (-3, 2, 0) = (4, -2, 2)$$

$$\vec{MP} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow (x+1, y-1, z-1) \cdot (4, -2, 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4 - 2y + 2 + 2z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2y + 2z + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y + z + 2 = 0, \text{ que é a equação}$$

pedida.

$$\text{b) } M = \left( \frac{1+4}{2}, \frac{7+5}{2}, \frac{2+3}{2} \right) = \left( \frac{5}{2}, 6, \frac{5}{2} \right)$$

$$\vec{AB} = (4, 5, 3) - (1, 7, 2) = (3, -2, 1)$$

$$\vec{MP} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \left( x - \frac{5}{2}, y - 6, z - \frac{5}{2} \right) \cdot (3, -2, 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{15}{2} - 2y + 12 + z - \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2y + z + 2 = 0, \text{ que é a equação}$$

pedida.

$$\text{56. } \vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1, y+1, z-3) \cdot (x, y-2, z-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - 2y + y - 2 + z^2 - 5z - 3z + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - y + z^2 - 8z = -13$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} + z^2 - 8z + 16 =$$

$$= -13 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 16$$

$$\Leftrightarrow \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{1}{2} \right)^2 + (z-4)^2 = \frac{7}{2}, \text{ que é a equação pedida.}$$

$$\text{57. } \vec{CT} \cdot \vec{TP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2+2, -1-0, -3-1) \cdot (x-2, y+1, z+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4, -1, -4) \cdot (x-2, y+1, z+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 8 - y - 1 - 4z - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - y - 4z - 21 = 0, \text{ que é a equação pedida.}$$

**58.**

**a)** O lugar geométrico dos pontos  $P(x, y, z)$  do espaço tais que  $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$  é a superfície esférica de diâmetro  $[AB]$ .

$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3, y-4, z-2) \cdot (x-1, y, z+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 3x - 3 + y^2 - 4y + z^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 = 7 + 1 + 4$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 12$$

**b)** O lugar geométrico dos pontos  $P(x, y, z)$  do espaço tais que  $\vec{AB} \cdot \vec{MP} = 0$ , onde  $M$  é o ponto médio de  $[AB]$ , é o plano mediador do segmento de reta  $[AB]$ .

$$M = \left( \frac{-3+1}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{2-2}{2} \right) = (-1, 2, 0)$$

$$\vec{AB} = (1, 0, -2) - (-3, 4, 2) = (4, -4, -4)$$

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{MP} &= 0 \Leftrightarrow (4, -4, -4) \cdot (x+1, y-2, z) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x + 4 - 4y + 8 - 4z = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x - 4y - 4z + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y - z + 3 = 0\end{aligned}$$

- c) O lugar geométrico dos pontos  $P(x, y, z)$  do espaço tais que  $\vec{AB} \cdot \vec{BP} = 0$  é o plano tangente à superfície esférica de centro  $A$  no ponto  $B$  ou é o plano perpendicular à reta  $AB$  que passa no ponto  $B$ .

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{BP} &= 0 \Leftrightarrow (4, -4, -4) \cdot (x-1, y, z+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x - 4 - 4y - 4z - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x - 4y - 4z - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y - z - 3 = 0\end{aligned}$$

59.

a)  $\vec{AB} = (3, 1, -1) - (-2, 5, 1) = (5, -4, -2)$

$$M = \left( \frac{-2+3}{2}, \frac{5+1}{2}, \frac{1-1}{2} \right) = \left( \frac{1}{2}, 3, 0 \right)$$

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{MP} &= 0 \Leftrightarrow (5, -4, -2) \cdot \left( x - \frac{1}{2}, y - 3, z \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - \frac{5}{2} - 4y + 12 - 2z = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - 4y - 2z + \frac{19}{2} = 0\end{aligned}$$

b)  $\vec{CA} = (-2, 5, 1) - (1, 1, 1) = (-3, 4, 0)$

$$\begin{aligned}\vec{CA} \cdot \vec{AP} &= 0 \Leftrightarrow (-3, 4, 0) \cdot (x+2, y-5, z-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x - 6 + 4y - 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x + 4y - 26 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - 4y + 26 = 0\end{aligned}$$

60. Qualquer ponto da reta  $r$  é da forma  $(1+2k, -1-k, k)$ , sendo  $k$  um número real. Substituindo na equação do plano:

$$\begin{aligned}1 + 2k - 2(-1-k) &= 4 \Leftrightarrow 1 + 2k + 2 + 2k = 4 \\ &\Leftrightarrow 4k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Assim, obtém-se o ponto de coordenadas

$$\left( 1 + 2 \times \frac{1}{4}, -1 - \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) = \left( \frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{1}{4} \right), \text{ que é o ponto de interseção da reta } r \text{ com o plano } \alpha.$$

61.

- a) Substituindo na equação da reta  $(x, y, z)$  pelas coordenadas do ponto  $A$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}\left( \frac{3}{2}, 2, 2 \right) &= (1, 2, 3) + \lambda(-1, 0, 2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \lambda = \frac{3}{2} \\ 2 = 2 \\ 3 + 2\lambda = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ 2 = 2 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

Logo, o ponto  $A$  pertence à reta  $s$ .

Substituindo na equação da reta  $(x, y, z)$  pelas coordenadas do ponto  $B$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}(-1, 2, -1) &= (1, 2, 3) + \lambda(-1, 0, 2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \lambda = -1 \\ 2 = 2 \\ 3 + 2\lambda = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ 2 = 2 \\ \lambda = -2 \end{cases}\end{aligned}$$

Logo, o ponto  $B$  não pertence à reta  $s$ .

- b) Qualquer ponto do plano  $yOz$  é da forma  $(0, y, z)$ , onde  $y$  e  $z$  representam números reais.

Assim:

$$\begin{aligned}(0, y, z) &= (1, 2, 3) + \lambda(-1, 0, 2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \lambda = 0 \\ 2 = y \\ 3 + 2\lambda = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases}\end{aligned}$$

Logo, o ponto de interseção da reta  $s$  com o plano  $yOz$  tem coordenadas  $(0, 2, 5)$ .

- c) Por exemplo,  $r(x, y, z) = (-1, 2, -1) + k(-2, 0, 4)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

- d) Sabe-se que o vetor de coordenadas  $(-1, 0, 2)$  é um vetor diretor da reta  $s$ . Um vetor diretor da reta  $t$  terá de ser perpendicular a qualquer vetor diretor da reta  $s$ . Assim, um vetor diretor da reta  $t$  pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas  $(2, 5, 1)$ .

Então, uma equação vetorial da reta  $t$  é, por exemplo,  $t(x, y, z) = \left( \frac{3}{2}, 2, 2 \right) + k(2, 5, 1)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

62.

a)  $\vec{AB} = (2, 4, 1) - (1, 3, 2) = (1, 1, -1)$

O triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $B$ , por estar inscrito numa semicircunferência, logo o vetor  $\vec{AB}$  é normal ao plano  $BCD$ .

Então, como  $B$  pertence ao plano  $BCD$  e  $\vec{AB}$  é um vetor normal a este plano, uma equação cartesiana do plano  $BCD$  é:

$$\begin{aligned}1(x-2) + 1(y-4) - 1(z-1) &= 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 + y - 4 - z + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + y - z - 5 = 0\end{aligned}$$

- b)  $\vec{CD}$  é um vetor normal ao plano  $ABC$  e, como tal, é colinear com  $(0, 1, 1)$  que é um vetor colinear a este plano.

Assim,  $\vec{CD} = (0, k, k)$ , para algum  $k$  real.

Como a altura do cilindro é  $2\sqrt{2}$ , tem-se:

$$\begin{aligned}\|\vec{CD}\| &= 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + k^2 + k^2} = \sqrt{8} \Leftrightarrow 2k^2 = 8 \\ &\Leftrightarrow k = 2 \vee k = -2\end{aligned}$$

Logo,  $\vec{CD} = (0, 2, 2)$ , de acordo com a figura.

Um ponto da base superior do cilindro é:

$$A + \vec{CD} = (1, 3, 2) + (0, 2, 2) = (1, 5, 4)$$

Como a base superior do cilindro é paralela ao plano  $BCD$ , então um vetor normal a este plano é



também um vetor normal ao plano que contém essa base. Assim,  $(0, 1, 1)$  é um vetor normal ao plano que contém a base superior do cilindro.

Tem-se então que uma equação da base superior do cilindro é:

$$\begin{aligned} 0(x-1) + 1(y-5) + 1(z-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow y-5+z-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow y+z-9 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y+z=5 \\ 16x-5y+11z=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-z \\ 16x-5(5-z)+11z=23 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x-25+5z+11z=23 \\ 16x+16z=48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=3 \\ y=5-z \\ x=3-z \end{cases}$$

Assim, os pontos que pertencem à interseção dos dois planos são os pontos da forma:

$$(3-z, 5-z, z), z \in \mathbb{R}$$

Mas,  $(3-z, 5-z, z) = (3, 5, 0) + z(-1, -1, 1), z \in \mathbb{R}$ .

Logo, uma equação vetorial da reta de interseção dos dois planos é:

$$(x, y, z) = (3, 5, 0) + k(-1, -1, 1), k \in \mathbb{R}$$

**63.**

a) Seja  $M$  o ponto médio de  $[AC]$ .

$$M = \left( \frac{0+1}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{1+0}{2} \right) = \left( \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$$

Uma vez que a reta  $BD$  é paralela ao eixo  $Oy$  e que  $M$  é um ponto desta reta, então uma sua equação vetorial é  $(x, y, z) = \left( \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$ .

Assim, as coordenadas do ponto  $B$  são da forma  $\left( \frac{1}{2}, y, \frac{1}{2} \right)$  e as coordenadas do ponto  $D$  são da forma  $\left( \frac{1}{2}, -y, \frac{1}{2} \right)$ , sendo  $y$  um número real positivo.

$$\begin{aligned} \|\vec{AC}\| &= \|\vec{BD}\| \Leftrightarrow \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{0^2+(-2y)^2+0^2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} = \sqrt{4y^2} \\ &\Leftrightarrow 4y^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Como } y > 0, \text{ então } y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Logo, } B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ e } D\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{b) } E = M = \left( \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{cases} \vec{EV} \cdot \vec{AC} = 0 \\ \vec{EV} \cdot \vec{DB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}, y, z - \frac{1}{2}\right) \cdot (1, 0, -1) = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}, y, z - \frac{1}{2}\right) \cdot (0, \sqrt{2}, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} - z + \frac{1}{2} = 0 \\ \sqrt{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

que são as equações cartesianas da reta  $EV$ .

c) A reta  $EV$  é perpendicular ao plano  $ABC$ . Logo, qualquer vetor diretor da reta é normal ao plano. Assim, o vetor  $(1, 0, 1)$  é normal ao plano  $ABC$  e, consequentemente, é normal a qualquer plano que lhe seja paralelo.

Como o ponto  $V$  pertence à reta  $EV$ , tem-se que  $V(a, 0, a), a \in \mathbb{R}^+$ , de acordo com a figura.

$$\begin{aligned} V_{\text{pirâmide}} &= \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times \overline{EV} = \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \overline{EV} = 3\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 18 \\ &\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = 3 \vee a - \frac{1}{2} = -3 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{7}{2} \vee a = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Como } a \in \mathbb{R}^+, \text{ então } V\left(\frac{7}{2}, 0, \frac{7}{2}\right).$$

Assim, uma equação do plano paralelo a  $ABC$  que contém  $V$  é:

$$\begin{aligned} 1\left(x - \frac{7}{2}\right) + 0(y - 0) + 1\left(z - \frac{7}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - \frac{7}{2} + z - \frac{7}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow x + z &= 7 \end{aligned}$$

## Aprende Fazendo

Páginas 168 a 184

1. O declive da reta  $r$  é  $-\frac{1}{3}$ . Logo, o declive da reta  $s$ , que é perpendicular à reta  $r$ , é 3.

Assim, a reta  $r$  é da forma  $y = 3x + b$ .

Como o ponto de coordenadas  $(1, 2)$  pertence à reta  $s$ , tem-se:

$$2 = 3 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -1$$

Logo,  $s: y = 3x - 1$ .

A opção correta é a (B).



2. O declive da reta de equação  $y = 2x + 5$  é 2, pelo que o declive de uma reta que lhe seja perpendicular é  $-\frac{1}{2}$ .

Na opção (A) tem-se:

$$y + \frac{1}{2}x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{3}$$

A opção correta é a (A).

3. A circunferência representada na figura tem centro no ponto de coordenadas (4, 2) e raio 2. Assim, uma equação dessa circunferência é  $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$ , o que exclui as opções (B) e (C).

As retas  $p$  e  $r$  representadas na figura são perpendiculares, pelo que o produto dos seus declives é igual a  $-1$ . Assim, exclui-se a opção (A).

A opção correta é a (D).

4.  $(\vec{v} - \vec{u}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 - \|\vec{u}\|^2 = -\|\vec{u}\|^2$   
A opção correta é a (C).

5.  $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

$$\vec{AB} = (3, 0, -1) - (2, -4, -4) = (1, 4, 3)$$

$$\frac{1}{2} \|\vec{AB}\| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2} = \frac{1}{2} \sqrt{26}$$

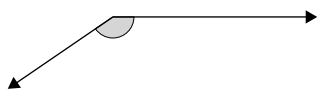
Logo,  $\|\vec{u}\| \neq \frac{1}{2} \|\vec{AB}\|$ , o que significa que a proposição (I) é falsa.

$\frac{3}{1} \neq \frac{0}{4} \neq \frac{-1}{3}$ , logo  $\vec{u}$  e  $\vec{AB}$  não são colineares e a proposição (II) é falsa.

$\vec{u} \cdot \vec{AB} = 3 \times 1 + 0 \times 4 + (-1) \times 3 = 3 - 3 = 0$ , ou seja, os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{AB}$  são perpendiculares e a proposição (III) é verdadeira.

A opção correta é a (D).

6. Se  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ , então o ângulo formado pelos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  é um ângulo obtuso, o que apenas acontece na opção (A):



A opção correta é a (A).

7.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 18 \Leftrightarrow \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \cos 60^\circ = 18$

$$\Leftrightarrow x \times x \times \frac{1}{2} = 18 \Leftrightarrow x^2 = 36$$

Logo,  $x = 6$ , ou seja, a medida do lado do triângulo é 6. Assim, o seu perímetro é  $3 \times 6 = 18$ .

A opção correta é a (A).

8.  $\vec{RQ} \cdot \vec{PO} = \|\vec{RQ}\| \|\vec{PO}\| \cos 120^\circ =$

$$= a \times a \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a^2}{2}$$

A opção correta é a (C).

9. O centro da circunferência é a origem do referencial. Seja  $T$  o ponto de tangência.

$$\vec{OT} = (3, 4), \text{ pelo que o declive da reta } OT \text{ é igual a } \frac{4}{3}.$$

Uma reta que seja tangente à circunferência no ponto  $T$  é perpendicular à reta  $OT$  e tem declive igual a  $-\frac{3}{4}$ .

A opção correta é a (D).

10. A reta tangente à circunferência de centro  $C$  no ponto  $A$  é o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  do plano tais que  $\vec{CA} \cdot \vec{AP} = 0$ .

A opção correta é a (B).

11. Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r} \left(2, -1, \frac{1}{8}\right)$ .

$$\begin{aligned} \left(2, -1, \frac{1}{8}\right) \cdot (16, -8, 1) &= 2 \times 16 + (-1) \times (-8) + \frac{1}{8} \times 1 = \\ &= 32 + 8 + \frac{1}{8} = \frac{321}{8} \end{aligned}$$

Ou seja, a reta  $r$  não é perpendicular à reta definida por  $(x, y, z) = k(16, -8, 1)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

$$\frac{2}{16} = \frac{-1}{-8} = \frac{\frac{1}{8}}{1} = \frac{1}{8}$$

Logo, a reta  $r$  é paralela à reta definida por:

$$(x, y, z) = k(16, -8, 1), k \in \mathbb{R}$$

A opção correta é a (B).

12. Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r} \left(2, \frac{5}{3}, 0\right)$ , que não é colinear com o vetor de coordenadas (2, 5, 0), logo este não é um vetor diretor da reta  $r$ .

Um vetor normal ao plano  $\alpha$  é  $\vec{n}(6, 5, 0)$ , que não é colinear com o vetor de coordenadas (6, 5, -4), logo este não é um vetor normal ao plano  $\alpha$ .

$\vec{r} \cdot \vec{n} = 2 \times 6 + \frac{5}{3} \times 5 + 0 \times 0 = \frac{61}{3}$ , logo os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{n}$  não são perpendiculares e, portanto, a reta  $r$  não é estritamente paralela ao plano  $\alpha$ .

Uma vez que  $\frac{2}{6} = \frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{1}{3}$ , então  $\vec{r}$  é colinear a  $\vec{n}$ ,

logo a reta  $r$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ .

A opção correta é a (D).

13.  $(2, 4, -1) \cdot (2, k - 1, -1) = 0 \Leftrightarrow 4 + 4k - 4 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 4k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$$

A opção correta é a (B).

- 14.** Um vetor normal ao plano dado é  $\vec{n}(1, -2, 0)$ .  
 $(1, -2, 0) \cdot (3, 2, 1) = 3 - 4 + 0 = -1$ , logo o plano não é paralelo à reta definida na opção (A).  
 $(1, -2, 0) \cdot \left(3, \frac{2}{3}, -5\right) = 3 - \frac{4}{3} + 0 = \frac{5}{3}$ , logo o plano não é paralelo à reta definida na opção (B).  
 $(1, -2, 0) \cdot (4, 5, 0) = 4 - 10 + 0 = -6$ , logo o plano não é paralelo à reta definida na opção (C).  
 $(1, -2, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0 + 0 + 0 = 0$ , logo o plano é paralelo à reta definida na opção (D).  
 A opção correta é a (D).

**15.**  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2} =$   
 $= \sqrt{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})} =$   
 $= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}} =$   
 $= \sqrt{\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \|\vec{v}\|^2} =$   
 $= \sqrt{3^2 + 2 \times 3 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4^2} =$   
 $= \sqrt{9 + 24 \times \frac{1}{2} + 16} =$   
 $= \sqrt{37}$   
 $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u} - \vec{v}\|^2} =$   
 $= \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})} =$   
 $= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}} =$   
 $= \sqrt{\|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \|\vec{v}\|^2} =$   
 $= \sqrt{3^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4^2} =$   
 $= \sqrt{9 - 24 \times \frac{1}{2} + 16} =$   
 $= \sqrt{13}$   
 A opção correta é a (A).

**16.**  $(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{BC} = \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AC} \cdot \vec{BC} =$   
 $= l \times l \times \cos 120^\circ + l \times l \times \cos 60^\circ =$   
 $= -\frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{2} =$   
 $= 0$   
 A opção correta é a (D).

**17.** Seja  $T(x, y)$  um ponto da reta  $t$ .  
 $\vec{OP} \cdot \vec{PT} = 0 \Leftrightarrow (a, b) \cdot (x - a, y - b) = 0$   
 $\Leftrightarrow ax - a^2 + by - b^2 = 0$   
 $\Leftrightarrow by = -ax + a^2 + b^2$   
 $\Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2 + b^2}{b}$

Tendo em conta que a circunferência representada tem centro na origem e raio 1, tem-se que  $a = \cos \alpha$  e  $b = \sin \alpha$ , onde  $\alpha$  representa a inclinação da reta  $OP$  e, então,  $a^2 + b^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ .

Assim,  $y = -\frac{a}{b}x + \frac{1}{b}$  é a equação reduzida da reta  $t$ .

A ordenada do ponto  $Q$  é 0 e o ponto  $Q$  pertence à reta  $t$ , logo:

$$0 = -\frac{a}{b}x + \frac{1}{b} \Leftrightarrow 0 = -ax + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$$

A opção correta é a (A).

**18.** Seja  $\alpha = (\widehat{\vec{CA}, \vec{CB}})$ .

$$\frac{3\pi}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Assim:

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

A opção correta é a (C).

**19.** Um vetor normal ao plano  $\alpha$  é  $\vec{n}_\alpha(9, -6, 3)$ .

Um vetor normal ao plano  $\beta$  é  $\vec{n}_\beta(4, -\sqrt{2}, 8)$ .

Um vetor normal ao plano  $\gamma$  é  $\vec{n}_\gamma(-3, 2, -1)$ .

$\vec{n}_\alpha = -3\vec{n}_\gamma$ , logo, os planos  $\alpha$  e  $\gamma$  são paralelos, mas as equações que os definem não são equivalentes, pelo que se trata de planos estritamente paralelos.

$\frac{9}{4} \neq \frac{-6}{-\sqrt{2}} \neq \frac{3}{8}$ , pelo que os planos  $\alpha$  e  $\beta$  não são

paralelos, e também não o são os planos  $\beta$  e  $\gamma$ .

A opção correta é a (D).

**20.**

**a)**  $y = 3$  representa uma reta horizontal, logo a sua inclinação é 0 radianos.

**b)**  $x = 4$  representa uma reta vertical, logo a sua inclinação é  $\frac{\pi}{2}$  radianos.

**c)** A reta de equação  $y = x + 1$  tem declive 1.

Assim, sendo  $\alpha$  a inclinação desta reta:

$$\text{tg } \alpha = 1 \wedge 0 < \alpha < \pi$$

$$\text{Logo, } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ radianos.}$$

**d)**  $2x + 2y - 7 = 0 \Leftrightarrow 2y = -2x + 7 \Leftrightarrow y = -x + \frac{7}{2}$

A reta de equação  $2x + 2y - 7 = 0$  tem declive  $-1$ .

Assim, sendo  $\alpha$  a inclinação desta reta:

$$\text{tg } \alpha = -1 \wedge 0 < \alpha < \pi$$

$$\text{Logo, } \alpha = \frac{3\pi}{4} \text{ radianos.}$$

**e)** A reta de equação  $(x, y) = (1, 2) + k(6, 2\sqrt{3})$ ,  $k \in \mathbb{R}$

$$\text{tem declive } \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Assim, sendo  $\alpha$  a inclinação desta reta:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge 0 < \alpha < \pi$$

$$\text{Logo, } \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ radianos.}$$

f) A reta definida por  $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 2 + \sqrt{3}k \end{cases}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  tem

declive  $\frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ .

Assim, sendo  $\alpha$  a inclinação desta reta:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3} \wedge 0 < \alpha < \pi$$

Logo,  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$  radianos.

## 21. Reta r:

$$m_r = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

O ponto de coordenadas  $(0, -2)$  pertence à reta r.

Logo,  $r: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$ .

**Reta s:**

$$m_s = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

O ponto de coordenadas  $(0, -2)$  pertence à reta s.

Logo,  $s: y = x - 2$ .

**Reta t:**

$$m_t = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$$

O ponto de coordenadas  $(0, -2)$  pertence à reta t.

Logo,  $t: y = -\sqrt{3}x - 2$ .

## 22. Reta r:

Os pontos de coordenadas  $(0, -4)$  e  $(5, 0)$  pertencem à reta r.

Logo,  $m_r = \frac{-4 - 0}{0 - 5} = \frac{4}{5}$ .

Como o ponto de coordenadas  $(0, -4)$  pertence à reta r,  $r: y = \frac{4}{5}x - 4$ .

Sendo  $\alpha$  a inclinação da reta r:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5} \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ$$

Logo,  $\alpha \approx 38,7^\circ$ .

**Reta s:**

Os pontos de coordenadas  $(3, 1)$  e  $(5, 0)$  pertencem à reta s.

Logo,  $m_s = \frac{1 - 0}{3 - 5} = -\frac{1}{2}$ .

Assim,  $s: y = -\frac{1}{2}x + b$ .

Como o ponto de coordenadas  $(5, 0)$  pertence à reta s:

$$0 = -\frac{1}{2} \times 5 + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{2}$$

Então,  $s: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ .

Sendo  $\beta$  a inclinação da reta s:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{2} \wedge 0^\circ < \beta < 180^\circ$$

Logo,  $\beta \approx 153,4^\circ$ .

$$\begin{aligned} 23. (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 19 &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = 19 \\ &\Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 19 \\ &\Leftrightarrow 10^2 - \|\vec{v}\|^2 = 19 \\ &\Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2 = 100 - 19 \\ &\Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2 = 81 \end{aligned}$$

Logo,  $\|\vec{v}\| = \sqrt{81} = 9$ .

## 24.

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{AB} &= (2, -5) - (0, 3) = (2, -8) \\ (2\vec{AB}) \cdot \vec{u} &= (4, -16) \cdot (-1, 4) = -4 - 64 = -68 \\ \text{b) } \vec{u} \cdot (\vec{u} + 6\vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} + 6\vec{u} \cdot \vec{v} = \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 0 = (-1)^2 + 4^2 = 17 \\ \text{c) } \vec{BA} &= -\vec{AB} = (-2, 8) \\ \left(\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{BA}\right) \cdot (3\vec{u}) &= 3\vec{u} \cdot \vec{v} + \frac{3}{2}\vec{BA} \cdot \vec{u} = \\ &= 3 \times 0 + (-3, 12) \cdot (-1, 4) = 3 + 48 = 51 \end{aligned}$$

## 25.

- a)  $\vec{AB} \cdot \vec{MP} = 0$ , sendo  $M$  o ponto médio do segmento de reta  $[AB]$ , representa a mediatriz do segmento de reta  $[AB]$ .
- b)  $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$  representa a circunferência de diâmetro  $[AB]$ .
- c)  $\vec{AP} \cdot \vec{BP} \leq 0$  representa o círculo de diâmetro  $[AB]$ .
- d)  $\vec{AP} \cdot \vec{AB} = 0$  representa a reta tangente à circunferência de centro em  $B$  e raio  $\vec{AB}$  no ponto  $A$  ou reta perpendicular ao segmento de reta  $[AB]$  que passa em  $A$ .

## 26.

a)

i)  $\vec{BO} \cdot \vec{CD} = 8 \times 4 \times \cos 0^\circ = 32$

ii)  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 4 \times 4 \times \cos 180^\circ = -16$

iii)  $\vec{OD} \cdot \vec{OB} = 4 \times 8 \times \cos 60^\circ = 32 \times \frac{1}{2} = 16$

iv)  $\vec{OA} \cdot \vec{AD} = 4 \times 4 \times \cos 120^\circ = 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -8$

- b)  $\vec{PD} \cdot \vec{PA} = 0$  representa a circunferência de diâmetro  $[AD]$ .

Seja  $h$  a altura do triângulo  $[OAD]$ . Pelo Teorema de Pitágoras:

$$4^2 = 2^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = 16 - 4 \Leftrightarrow h^2 = 12$$

Pelo que,  $h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

Assim,  $D(2, 2\sqrt{3})$ .

$$\begin{aligned}\vec{PD} \cdot \vec{PA} = 0 &\Leftrightarrow (2-x, 2\sqrt{3}-y) \cdot (4-x, -y) = 0 \\ &\Leftrightarrow 8-2x-4x+x^2-2\sqrt{3}y+y^2=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-6x+y^2-2\sqrt{3}y=-8 \\ &\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-2\sqrt{3}y+3=-8+9+3 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2=4\end{aligned}$$

## 27.

a) O declive da reta definida por

$$(x, y) = (5, \sqrt{2}) + k(3, -4), k \in \mathbb{R} \text{ é } -\frac{4}{3}.$$

Logo, o declive de uma reta que lhe seja perpendicular é  $\frac{3}{4}$ .

Assim, a equação pedida é da forma  $y = \frac{3}{4}x + b$ .

Como o ponto  $A(1, 2)$  pertence a esta reta:

$$2 = \frac{3}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{4}$$

A equação pedida é  $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ .

b)  $x - 5y = 2 \Leftrightarrow 5y = x - 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$

O declive da reta definida por  $x - 5y = 2$  é  $\frac{1}{5}$ .

Logo, o declive de uma reta que lhe seja perpendicular é  $-5$ .

Assim, a equação pedida é da forma  $y = -5x + b$ .

Como o ponto  $A(1, 2)$  pertence a esta reta:

$$2 = -5 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 7$$

A equação pedida é  $y = -5x + 7$ .

c) O declive da reta é dado por  $m = \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Assim, a equação pedida é da forma  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ .

Como o ponto  $A(1, 2)$  pertence a esta reta:

$$2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

A equação pedida é  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

d) O declive da reta é dado por  $m = \tan 45^\circ = 1$ .

Assim, a equação pedida é da forma  $y = x + b$ .

Como o ponto  $A(1, 2)$  pertence a esta reta:

$$2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1$$

A equação pedida é  $y = x + 1$ .

## 28.

a) O declive da reta  $r$  é 2. Um vetor diretor desta reta é  $\vec{r}(1, 2)$ .

O declive da reta  $s$  é  $-4$ . Um vetor diretor desta reta é  $\vec{s}(1, -4)$ .

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = (1, 2) \cdot (1, -4) = 1 - 8 = -7$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$

Seja  $\alpha$  o ângulo formado pelas retas  $r$  e  $s$ .

$$\cos \alpha = \frac{|-7|}{\sqrt{5} \times \sqrt{17}}$$

Logo,  $\alpha \approx 40,6^\circ$ .

b) Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(-2, 3)$ .

$$5x + 2y = 7 \Leftrightarrow 2y = -5x + 7 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}$$

O declive da reta  $s$  é  $-\frac{5}{2}$ . Um vetor diretor da reta  $s$  é  $\vec{s}(2, -5)$ .

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = (-2, 3) \cdot (2, -5) = -4 - 15 = -19$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

Seja  $\alpha$  o ângulo formado pelas retas  $r$  e  $s$ .

$$\cos \alpha = \frac{|-19|}{\sqrt{13} \times \sqrt{29}}$$

Logo,  $\alpha \approx 11,9^\circ$ .

c) A reta  $r$  é uma reta horizontal e a reta  $s$  é uma reta vertical, logo o ângulo formado pelas retas  $r$  e  $s$  é  $90^\circ$ .

## 29.

a)  $\vec{AB} \cdot \vec{MP} = 0$ , sendo  $M$  o ponto médio do segmento de reta  $[AB]$ , representa o plano mediador do segmento de reta  $[AB]$ .

b)  $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$  representa a superfície esférica de diâmetro  $[AB]$ .

c)  $\vec{AP} \cdot \vec{BP} \leq 0$  representa a esfera de diâmetro  $[AB]$ .

d)  $\vec{AP} \cdot \vec{AB} = 0$  representa o plano tangente à superfície esférica de centro em  $B$  e raio  $\vec{AB}$  no ponto  $A$  ou plano perpendicular ao segmento de reta  $[AB]$  que passa em  $A$ .

$$\begin{aligned}30. \quad &\begin{cases} (x, y, 1) \cdot (6, 4, 0) = 0 \\ (x, y, 1) \cdot \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 0 \\ x - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 4y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

## 31.

a)  $\vec{AB} = (0, -1, 4) - (1, -1, 3) = (-1, 0, 1)$

Assim, um sistema de equações paramétricas da reta  $AB$  é:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

- b) Sendo a reta  $s$  paralela ao eixo  $Oz$ , um vetor diretor desta reta é  $(0, 0, 1)$ .

Assim, uma equação vetorial da reta  $s$  é:

$$(x, y, z) = (0, -1, 4) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$$

### 32.

a)  $(0, 2, -1) = (1, 2, -3) + t(-2, 0, 4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 - 2t \\ 2 = 2 \\ -1 = -3 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 1 \\ 2 = 2 \\ 4t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ 2 = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, o ponto  $A$  pertence à reta  $r$ .

$$(-5, 2, -3) = (1, 2, -3) + t(-2, 0, 4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 = 1 - 2t \\ 2 = 2 \\ -3 = -3 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 6 \\ 2 = 2 \\ 4t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ 2 = 2 \\ t = 0 \end{cases}$$

Logo, o ponto  $B$  não pertence à reta  $r$ .

- b) Os pontos do plano definidos por  $y = x$  são da forma  $(x, x, z)$ , sendo  $x$  e  $z$  números reais.

$$(x, x, z) = (1, 2, -3) + t(-2, 0, 4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t \\ x = 2 \\ z = -3 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 - 2t \\ x = 2 \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \\ z = -3 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \\ z = -5 \end{cases}$$

O ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $y = x$  tem coordenadas  $(2, 2, -5)$ .

### c)

- i) Um vetor diretor da reta  $s$  é, por exemplo,  $(-1, 0, 2)$ , que é colinear com  $(-2, 0, 4)$ , que é um vetor diretor da reta  $r$ .

Assim,  $s: (x, y, z) = (-5, 2, -3) + k(-1, 0, 2), k \in \mathbb{R}$ .

- ii) Um vetor diretor da reta  $t$  tem de ser perpendicular ao vetor  $(-2, 0, 4)$ , podendo ser, por exemplo,  $(4, 0, 2)$ .

Assim,  $t: (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(4, 0, 2), k \in \mathbb{R}$ .

- iii) Um vetor normal ao plano  $\alpha$  é  $(-1, 2, -1)$ , que é um vetor diretor da reta  $u$ , perpendicular ao plano  $\alpha$ . Assim,  $u: (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(-1, 2, -1), k \in \mathbb{R}$ .

- iv) Um vetor normal ao plano  $\beta$  é  $(1, -1, -2)$ . Um vetor diretor da reta  $v$  tem de ser perpendicular ao vetor normal ao plano, por exemplo,  $(1, 1, 0)$ .

Assim,  $v: (x, y, z) = (-5, 2, -3) + k(1, 1, 0), k \in \mathbb{R}$ .

### 33.

- a) Por exemplo,  $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(4, 5, 6), k \in \mathbb{R}$ .

- b) Por exemplo,  $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(4, 5, 0), k \in \mathbb{R}$ .

- c) Por exemplo,  $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(1, 0, 1), k \in \mathbb{R}$ .

- d) Por exemplo,  $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$ .

- e) Por exemplo,  $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(-3, -1, 7), k \in \mathbb{R}$ .

### 34.

a)  $4(x-1) + 5(y-2) + 6(z-3) = 0$

$$\Leftrightarrow 4x - 4 + 5y - 10 + 6z - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 5y + 6z - 32 = 0$$

b)  $\vec{AB} = (0, -2, 4) - (1, 2, 3) = (-1, -4, 1)$

$$\vec{AC} = (1, 0, 0) - (1, 2, 3) = (0, -2, -3)$$

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{AC}$ .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, -4, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, -2, -3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a - 4b + c = 0 \\ -2b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 4 \times \left(-\frac{3}{2}c\right) + c = 0 \\ b = -\frac{3}{2}c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 7c = 0 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7c \\ b = -\frac{3}{2}c \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}\left(7c, -\frac{3}{2}c, c\right), c \in \mathbb{R}$ .

Por exemplo, se  $c = 2$ , obtém-se  $\vec{u}(14, -3, 2)$ .

Então,  $\vec{u}(14, -3, 2)$  é um vetor normal ao plano e  $A(1, 2, 3)$  é um ponto do plano:

$$14(x-1) - 3(y-2) + 2(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 14x - 14 - 3y + 6 + 2z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 14x - 3y + 2z - 14 = 0$$

- c) Um vetor normal ao plano é, por exemplo,  $(8, 0, 3)$ .

$$8(x-1) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow 8x - 8 + 3z - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x + 3z = 17$$

d)  $\sqrt{2}(x-1) + 1(y-2) - 1(z-3) = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x - \sqrt{2} + y - 2 - z + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x + y - z = \sqrt{2} - 1$$

e)  $0(x-1) + 1(y-2) + 0(z-3) = 0 \Leftrightarrow y - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow y = 2$$

### 35.

a)  $V_{\text{sólido}} = 288 \Leftrightarrow a^3 + \frac{1}{3}a^3 = 288$

$$\Leftrightarrow a^3 = 216$$

$$\Leftrightarrow a = 6$$

$$R(6, 0, 6), V(3, 3, 12), U(6, 6, 6)$$

$$\vec{RV} = (3, 3, 12) - (6, 0, 6) = (-3, 3, 6)$$

$$\vec{UV} = (3, 3, 12) - (6, 6, 6) = (-3, -3, 6)$$

$$\|\vec{RV}\| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{54}$$

$$\|\vec{UV}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{54}$$

$\vec{RV} \cdot \vec{UV} = (-3, 3, 6) \cdot (-3, -3, 6) = 9 - 9 + 36 = 36$   
Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo formado pelas retas  $RV$  e  $UV$ .

$$\cos \alpha = \frac{36}{\sqrt{54} \times \sqrt{54}} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$$

Assim,  $\alpha \approx 48,2^\circ$ .

b)  $\vec{RV} = (-3, 3, 6)$

Assim,  $RV: (x, y, z) = (6, 0, 6) + k(-3, 3, 6), k \in \mathbb{R}$ .

c)  $M(3, 3, 6), T(0, 6, 6)$

$$\vec{MT} = (0, 6, 6) - (3, 3, 6) = (-3, 3, 0)$$

$$\text{Assim, } \begin{cases} x = 6 - 3\lambda \\ y = 6 + 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 6 \end{cases}$$

é o sistema de equações paramétricas pedido.

d) Os pontos  $R, S$  e  $V$  não são colineares.

$$R(6, 0, 6)$$

$-2 \times 0 + 6 - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ , logo o ponto  $R$  pertence ao plano definido por  $-2y + z - 6 = 0$ .

$$S(0, 0, 6)$$

$-2 \times 0 + 6 - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ , logo o ponto  $S$  pertence ao plano definido por  $-2y + z - 6 = 0$ .

$$V(3, 3, 12)$$

$-2 \times 3 + 12 - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ , logo o ponto  $V$  pertence ao plano definido por  $-2y + z - 6 = 0$ .

Logo, o plano  $RSV$  pode ser definido por:

$$-2y + z - 6 = 0$$

e)  $\vec{RP} \cdot \vec{TP} = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 6, y, z - 6) \cdot (x, y - 6, z - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 6y + z^2 - 12z + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 12z + 36 = 0$$

36.

a)  $\vec{OA} \cdot \vec{OE} = r \times r \times \cos 72^\circ = r^2 \cos 72^\circ$

Logo, a proposição é verdadeira.

**Cálculo auxiliar**

$$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

b)  $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = r \times r \times \cos (2 \times 72^\circ) = r^2 \cos 144^\circ$

Logo, a proposição é verdadeira.

c)  $\vec{AO} \cdot \vec{AE} = r \times l \times \cos \left( \frac{108^\circ}{2} \right) = r l \cos 54^\circ$

Logo, a proposição é verdadeira.

**Cálculo auxiliar**

$$\frac{180^\circ \times (5 - 2)}{5} = 108^\circ$$

d)  $\vec{CB} \cdot \vec{CD} = l \times l \times \cos 108^\circ \neq l^2 \cos 216^\circ$

Logo, a proposição é falsa.

e)  $\vec{AB} \cdot \vec{ED} = l \times l \times \cos \left( \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} \right) = l^2 \cos 36^\circ$

Logo, a proposição é verdadeira.

f)  $\vec{DC} \cdot \vec{DB} = l \times 2l \cos 36^\circ \cos 36^\circ \neq 2l^2 \cos 36^\circ \cos 72^\circ$

Logo, a proposição é falsa.

**Cálculo auxiliar**

Pela Lei dos Cossenos:

$$l^2 = l^2 + \overline{DB}^2 - 2l \overline{DB} \cos 36^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{DB}^2 - 2l \overline{DB} \cos 36^\circ = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{DB} (\overline{DB} - 2l \cos 36^\circ) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{DB} = 0 \vee \overline{DB} = 2l \cos 36^\circ$$

Logo,  $\overline{DB} = 2l \cos 36^\circ$ .

g)  $\vec{DC} \cdot \vec{DA} = l \times 2l \cos 36^\circ \times \cos (108^\circ - 36^\circ) = 2l^2 \cos 36^\circ \cos 72^\circ$

Logo, a proposição é verdadeira.

37.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6 \times 3\sqrt{3} \times \cos \left( \frac{60^\circ}{2} \right) = 18\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9 \times 3 = 27$

**Cálculo auxiliar**

Pela Lei dos Cossenos:

$$\overline{AC}^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 3 \times \cos 120^\circ \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 27$$

Logo,  $\overline{AC} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ .

38.

a)  $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| \Leftrightarrow \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}}$   
 $\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{w}$   
 $\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{w} \cdot \vec{w} = 0$   
 $\Leftrightarrow (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$

Ou seja,  $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$  quando e apenas quando os vetores  $\vec{v} + \vec{w}$  e  $\vec{v} - \vec{w}$  forem perpendiculares.

b) Uma vez que  $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$ , então os vetores  $\vec{v} + \vec{w}$  e  $\vec{v} - \vec{w}$  são perpendiculares.

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC} = \vec{v} + \vec{w}$$

$$\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB} = \vec{v} - \vec{w}$$

Então, as diagonais do quadrilátero  $[ABCD]$  são perpendiculares e os seus lados têm comprimentos iguais, ou seja,  $[ABCD]$  é um losango.

39.

a)  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) =$   
 $= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$   
 $= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

b) Caso  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sejam perpendiculares, tem-se  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$  ou seja, a propriedade referida na alínea anterior reduz-se ao Teorema de Pitágoras.

c) Seja  $\alpha$  o ângulo formado pelos vetores  $\vec{u} + \vec{v}$  e  $\vec{v}$ .

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v}}{\|\vec{u} + \vec{v}\| \|\vec{v}\|} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u} + \vec{v}\| \|\vec{v}\|}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{-\frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + \|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|^2} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\frac{\|\vec{u}\|^2}{2}}{\|\vec{u}\|^2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

Logo,  $\alpha = 60^\circ$ .

#### Cálculo auxiliar

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{\|\vec{u}\|^2}{2}$$

40.

a) Pela Lei dos Cossenos:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

$$\Leftrightarrow 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2}{2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Assim:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$$

$$= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \frac{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2}{2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} =$$

$$= \frac{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

b)

$$\text{i) } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (6^2 + 5^2 - 4^2) = \frac{45}{2}$$

$$\text{ii) } \vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2} (6^2 + 4^2 - 5^2) = \frac{27}{2}$$

$$\text{iii) } \vec{CA} \cdot \vec{CB} = \frac{1}{2} (5^2 + 4^2 - 6^2) = \frac{5}{2}$$

41.

$$\text{a) } \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow (k, 3) \cdot (2, k-1) < 0$$

$$\Leftrightarrow 2k + 3k - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow 5k < 3$$

$$\Leftrightarrow k < \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow k \in \left] -\infty, \frac{3}{5} \right[$$

$$\text{b) } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (k, 3) \cdot (2, k-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2k + 3k - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5k = 3$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{3}{5}$$

$$\text{c) } \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (k, 3) \cdot (k+2, k+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 2k + 3k + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 5k + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = -2 \vee k = -3$$

42.

$$\text{a) } \vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x, y-1) \cdot (x-6, y-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = -5 + 9 + 9$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 = 13$$

b) Os pontos  $C$  e  $D$  são ambos da forma  $(x, 0)$ , sendo  $x$  real.

Substituindo na equação da circunferência, vem:

$$(x-3)^2 + (0-3)^2 = 1 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x-3 = 2 \vee x-3 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1$$

Assim,  $C(1, 0)$  e  $D(5, 0)$ .

c) O ponto  $M(3, 3)$  é o centro da circunferência.

$$\vec{MC} \cdot \vec{CP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-3, 0-3) \cdot (x-1, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2, -3) \cdot (x-1, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2 - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y = -2x + 2$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}, \text{ que é a equação reduzida da reta}$$

tangente à circunferência no ponto  $C$ .

$$\vec{MD} \cdot \vec{DP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (5-3, 0-3) \cdot (x-5, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2, -3) \cdot (x-5, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 10 - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y = 2x - 10$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}, \text{ que é a equação reduzida da}$$

reta tangente à circunferência no ponto  $D$ .

d) O declive da reta definida por  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$  é  $-\frac{2}{3}$ .

Então, um seu vetor diretor pode ser  $\vec{u}(3, -2)$ .

O declive da reta definida por  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$  é  $-\frac{2}{3}$ .



Então, um seu vetor diretor pode ser  $\vec{v}(3, 2)$ .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2) \cdot (3, 2) = 9 - 4 = 5$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo formado pelas retas.

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{5}{13}$$

Logo,  $\alpha \approx 67,38^\circ$ .

43.

$$a) m_t = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Logo, } m_u = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$$

$$\text{Então, } u: y = -\sqrt{3}x + b.$$

Como o ponto A pertence à reta u:

$$0 = -\sqrt{3} \times 5 + b \Leftrightarrow b = 5\sqrt{3}.$$

$$\text{Assim, } u: y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}.$$

b) Como B pertence à reta u:

$$y = -\sqrt{3} \times 4 + 5\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{Logo, } B(4, \sqrt{3}).$$

$C(x, 0)$ , sendo  $x$  um número real.

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (5 - 4, 0 - \sqrt{3}) \cdot (x - 4, 0 - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1, -\sqrt{3}) \cdot (x - 4, -\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Logo, a abscissa do ponto C é 1.

44.

a) 1.º processo

$$\vec{DA} \cdot \vec{DC} = \|\vec{DA}\| \|\vec{DC}\| \cos(\widehat{DA, DC}) =$$

$$= a \times a \times \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{DB} = \|\vec{AD}\| \|\vec{DB}\| \cos(\widehat{AD, DB}) =$$

$$= a \times a \times \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

2.º processo

$$\vec{DA} \cdot \vec{DC} = \vec{DA} \times \vec{DI} = a \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{DB} = -\vec{AD} \times \vec{DI} = -a \times \frac{a}{2} = -\frac{a^2}{2}$$

$$\begin{aligned} b) \vec{AD} \cdot \vec{CB} &= \vec{AD} \cdot (\vec{CA} + \vec{AB}) = \\ &= \vec{AD} \cdot \vec{CA} + \vec{AD} \cdot \vec{AB} = \\ &= \vec{CA} \cdot \vec{AD} + \vec{AD} \cdot \vec{AB} = \\ &= \vec{DA} \cdot \vec{DC} + \vec{AD} \cdot \vec{AB} = \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo,  $\vec{AD}$  e  $\vec{CB}$  são vetores perpendiculares.

45.

a) Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(1, 2, -1)$  e um vetor diretor da reta  $s$  é  $\vec{s}(2, 1, -2)$ . Estes vetores não são colineares, já que  $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1}$ . Como o ponto de coordenadas  $(1, 0, -1)$  é comum a ambas as retas, então  $r$  e  $s$  são retas concorrentes e, portanto, definem um plano.

b) Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 2, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 1, -2) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ 2a + b - 2c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = a + 2b \\ 2a + b - 2a - 4b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,  $\vec{u}(c, 0, c)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Por exemplo, se  $c = 1$  obtém-se  $\vec{u}(1, 0, 1)$ .

Então,  $\vec{u}(1, 0, 1)$  é um vetor normal ao plano definido pelas retas  $r$  e  $s$  e  $(1, 0, -1)$  é um ponto do plano:

$$1(x - 1) + 0(y - 0) + 1(z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + z = 0$$

Assim, o plano definido pelas retas  $r$  e  $s$  é estritamente paralelo ao plano de equação  $x + z = 2$ .

46.

a) O ponto A pertence ao plano  $xOy$ , pelo que  $A(x, y, 0)$ , onde  $x$  e  $y$  representam números reais positivos.

Uma vez que o triângulo  $[OAB]$  é equilátero, tem-se  $\overline{OA} = \overline{OB}$  e  $\overline{BA} = \overline{OB}$ .

Como B pertence à reta  $BD$  e ao eixo  $Oy$ , tem-se que as suas coordenadas são  $(0, 4, 0)$  e, então,  $\overline{OB} = 4$ .

Assim:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overline{OA} = \overline{OB} \\ \overline{BA} = \overline{OB} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 0^2} = 4 \\ \sqrt{x^2 + (y - 4)^2 + 0^2} = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 - 8y + 16 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 16 - 8y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4 = 16 \\ \text{---} \end{cases} \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 12 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2\sqrt{3} \\ y = 2 \end{cases}$$

Logo,  $A(2\sqrt{3}, 2, 0)$ .

**b)**  $E(0, 0, 6)$

$$\vec{AE} = (-2\sqrt{3}, -2, 6)$$

Logo, um sistema de equações paramétricas da reta  $AE$  é:

$$\begin{cases} x = -2\sqrt{3}\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 6 + 6\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

**c)**  $\vec{AB} = (-2\sqrt{3}, 2, 0)$

Logo, um sistema de equações paramétricas da reta  $AB$  é:

$$\begin{cases} x = -2\sqrt{3}\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

**d)**  $\vec{AE} \cdot \vec{AB} = (-2\sqrt{3}, -2, 6) \cdot (-2\sqrt{3}, 2, 0) = 12 - 4 + 0 = 8$

$$\|\vec{AE}\| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{12 + 4 + 36} = \sqrt{52}$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{12 + 4 + 0} = 4$$

$$\cos(\widehat{AE, AB}) = \frac{|8|}{\sqrt{52} \times 4}$$

Logo,  $(\widehat{AE, AB}) \approx 73,9^\circ$ .

**e)** Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AE}$  e  $\vec{AB}$ .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AE} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-2\sqrt{3}, -2, 6) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2\sqrt{3}, 2, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3}a - 2b + 6c = 0 \\ -2\sqrt{3}a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3}a - 2\sqrt{3}a + 6c = 0 \\ b = \sqrt{3}a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6c = 4\sqrt{3}a \\ b = \sqrt{3}a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2\sqrt{3}a}{3} \\ b = \sqrt{3}a \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}\left(a, \sqrt{3}a, \frac{2\sqrt{3}a}{3}\right), a \in \mathbb{R}$ .

Por exemplo, se  $a = 1$ , obtém-se  $\vec{u}\left(1, \sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ .

Então,  $\vec{u}\left(1, \sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$  é um vetor normal ao

plano  $ABE$  e  $(2\sqrt{3}, 2, 0)$  é um ponto do plano:

$$1(x - 2\sqrt{3}) + \sqrt{3}(y - 2) + \frac{2\sqrt{3}}{3}(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}z = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{3}y + \frac{2\sqrt{3}}{3}z - 4\sqrt{3} = 0$$

**f)** Um vetor diretor da reta é o vetor normal ao plano  $ABE$  de coordenadas  $\left(1, \sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ .

Assim, uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano  $ABE$  e que contém o ponto  $O$  é:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + k\left(1, \sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), k \in \mathbb{R}$$

**g)** O lugar geométrico dos pontos  $P(x, y, z)$  que satisfazem a condição  $\vec{BE} \cdot \vec{MP} = 0$  é o plano mediador do segmento de reta  $[BE]$ .

$$\vec{BE} = (0, 0, 6) - (0, 4, 0) = (0, -4, 6)$$

$$M = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (0, 2, 3)$$

$$\vec{BE} \cdot \vec{MP} = 0 \Leftrightarrow (0, -4, 6) \cdot (x, y - 2, z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4y + 8 + 6z - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4y + 6z - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2y + 3z - 5 = 0$$

## 47.

**a)** Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AD}^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 8$$

Assim,  $\overline{AD} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ , ou seja, a aresta do cubo mede  $2\sqrt{2}$ .

**b)**  $A(2, 0, 0); B(4, 2, 0); C(2, 4, 0); D(0, 2, 0); E(2, 0, 2\sqrt{2}); F(4, 2, 2\sqrt{2}); G(2, 4, 2\sqrt{2}); H(0, 2, 2\sqrt{2})$

**c)**

$$\text{i) } \vec{BG} = (2, 4, 2\sqrt{2}) - (4, 2, 0) = (-2, 2, 2\sqrt{2})$$

Um vetor diretor da reta  $BG$  é, por exemplo,

$$(-1, 1, \sqrt{2}) \left( = \frac{1}{2} \vec{BG} \right).$$

Assim, uma equação vetorial da reta  $BG$  é:

$$(x, y, z) = (4, 2, 0) + k(-1, 1, \sqrt{2}), k \in \mathbb{R}$$

$$\text{ii) } \vec{FH} = (0, 2, 2\sqrt{2}) - (4, 2, 2\sqrt{2}) = (-4, 0, 0)$$

Assim, as equações cartesianas da reta  $FH$  são  $y = 2 \wedge z = 2\sqrt{2}$ .

$$\text{iii) } \vec{FG} = (2, 4, 2\sqrt{2}) - (4, 2, 2\sqrt{2}) = (-2, 2, 0)$$

Assim, uma equação vetorial da reta paralela à reta  $FG$  e que passa na origem do referencial é:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(-2, 2, 0), k \in \mathbb{R}$$

iv) O plano  $BDH$  é paralelo ao plano  $xOz$  e contém o ponto  $B(4, 2, 0)$ .

Assim, uma equação cartesiana do plano  $BDH$  é  $y = 2$ .

$$v) \vec{EF} = (4, 2, 2\sqrt{2}) - (2, 0, 2\sqrt{2}) = (2, 2, 0)$$

$$\vec{EC} = (2, 4, 0) - (2, 0, 2\sqrt{2}) = (0, 4, -2\sqrt{2})$$

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{EF}$  e  $\vec{EC}$ .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{EF} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{EC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 2, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 4, -2\sqrt{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ 4b - 2\sqrt{2}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = \frac{2}{\sqrt{2}}b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = \sqrt{2}b \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}(-b, b, \sqrt{2}b)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

Por exemplo, se  $b = -1$  obtém-se  $\vec{u}(1, -1, -\sqrt{2})$ .

Então,  $\vec{u}(1, -1, -\sqrt{2})$  é um vetor normal ao plano

$EFC$  e  $(2, 0, 2\sqrt{2})$  é um ponto do plano:

$$1(x - 2) - 1(y - 0) - \sqrt{2}(z - 2\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 - y - \sqrt{2}z + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y - \sqrt{2}z = -2$$

$$vi) \vec{FG} = (2, 4, 2\sqrt{2}) - (4, 2, 2\sqrt{2}) = (-2, 2, 0)$$

$$-2(x - 0) + 2(y - 0) + 0(z - 0) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2y = 0$$

#### 48.

a) Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right)$  e um vetor normal ao plano  $\alpha$  é  $\vec{n}(2, 4, -1)$ .

Ora,  $\vec{r} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} + 2 - 1 = \frac{3}{2}$ , pelo que a reta não é paralela ao plano  $\alpha$ , ou seja, a reta  $r$  é concorrente ao plano  $\alpha$ .

b) Os pontos da reta  $r$  são da forma  $\left(1 + \frac{k}{4}, 2 + \frac{k}{2}, 2 + k\right)$ , sendo  $k$  um número real.

Substituindo na equação do plano:

$$2 \times \left(1 + \frac{k}{4}\right) + 4 \left(2 + \frac{k}{2}\right) - (2 + k) = -4$$

$$\Leftrightarrow 2 + \frac{k}{2} + 8 + 2k - 2 - k = -4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}k = -12$$

$$\Leftrightarrow k = -8$$

Então, o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\alpha$  tem coordenadas:

$$\left(1 - \frac{8}{4}, 2 - \frac{8}{2}, 2 - 8\right) = (-1, -2, -6)$$

#### 49.

a) Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(-2, 3, 4)$  e um vetor normal ao plano  $\alpha$  é  $\vec{n}(0, 4, -3)$ .

Ora,  $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0 + 12 - 12 = 0$ , pelo que a reta  $r$  é estritamente paralela ao plano  $\alpha$  ou a reta  $r$  é coincidente com o plano  $\alpha$ .

Um ponto da reta é o ponto de coordenadas  $(1, 0, -7)$ . Substituindo estas coordenadas na equação do plano, tem-se:

$$4 \times 0 - 3 \times (-7) = 1 \Leftrightarrow 21 = 1, \text{ que é uma proposição falsa.}$$

Logo, a reta  $r$  é estritamente paralela ao plano  $\alpha$ .

b) Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(2, -3, 1)$  e um vetor normal ao plano  $\alpha$  é  $\vec{n}(2, -1, -1)$ .

Ora,  $\vec{r} \cdot \vec{n} = 4 + 3 - 1 = 6$ , pelo que a reta  $r$  não é paralela ao plano  $\alpha$ , ou seja, a reta  $r$  é concorrente ao plano  $\alpha$ .

Os pontos da reta  $r$  são da forma  $(1 + 2k, -2 - 3k, k)$ , sendo  $k$  um número real.

Substituindo na equação do plano:

$$2 \times (1 + 2k) - (-2 - 3k) - k = 6$$

$$\Leftrightarrow 2 + 4k + 2 + 3k - k = 6$$

$$\Leftrightarrow 6k = 2$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

Então, o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\alpha$  tem coordenadas:

$$\left(1 + \frac{2}{3}, -2 - 1, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, -3, \frac{1}{3}\right)$$

#### 50.

a) A reta  $EV$  é perpendicular ao plano  $ABC$ , pelo que um vetor normal a este plano é um vetor diretor da reta. Um vetor normal ao plano  $ABC$  e um vetor diretor da reta  $EV$  é  $\vec{n}(-1, 6, 1)$ .

Assim, uma equação vetorial que defina a reta  $EV$

$$\text{é } (x, y, z) = \left(-1, \frac{19}{2}, 4\right) + k(-1, 6, 1), k \in \mathbb{R}.$$

b) O ponto  $E$  é o ponto de interseção da reta  $EV$  com o plano  $ABC$ .

Os pontos da reta  $EV$  são da forma

$$\left(-1 - k, \frac{19}{2} + 6k, 4 + k\right), \text{ sendo } k \text{ um número real.}$$

Substituindo na equação do plano  $ABC$ :

$$-(-1 - k) + 6\left(\frac{19}{2} + 6k\right) + (4 + k) + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + k + 57 + 36k + 4 + k + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow 38k = -76$$

$$\Leftrightarrow k = -2$$

Então, o ponto  $E$  tem coordenadas

$$\left(-1 + 2, \frac{19}{2} - 12, 4 - 2\right) = \left(1, -\frac{5}{2}, 2\right).$$

c) Se  $\vec{n}(a, b, c)$  um vetor não nulo normal ao plano cuja equação se pretende encontrar. Tem-se que  $\vec{n}(-1, 6, 1) = 0$ , sendo  $(-1, 6, 1)$  um vetor normal ao plano  $ABC$ , e que  $\vec{n}\left(1, \frac{25}{2}, 2\right) = 0$ , onde  $\left(1, \frac{25}{2}, 2\right)$  é um vetor diretor da reta  $VA$ . Assim:

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 6, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot \left(1, \frac{25}{2}, 2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 6b + c = 0 \\ a + \frac{25}{2}b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 6b + c \\ 6b + c + \frac{25}{2}b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12b + 2c + 25b + 4c = 0 \\ 37b + 6c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \times \left(-\frac{6}{37}\right)c + c \\ b = -\frac{6}{37}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{37}c \\ b = -\frac{6}{37}c \end{cases}$$

Assim,  $\vec{n}\left(\frac{1}{37}c, -\frac{6}{37}c, c\right)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Por exemplo, se  $c = -37$ , obtém-se  $\vec{n}(-1, 6, -37)$ . Então,  $\vec{n}(-1, 6, -37)$  é um vetor normal ao plano perpendicular a  $ABC$  e que contém a reta  $VA$ .

Como  $v\left(-1, \frac{19}{2}, 4\right)$  é um ponto deste plano:

$$\begin{aligned} -1(x+1) + 6\left(y - \frac{19}{2}\right) - 37(z-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x - 1 + 6y - 57 - 37z + 148 &= 0 \\ \Leftrightarrow -x + 6y - 37z + 90 &= 0 \end{aligned}$$

51.

a)

$$\begin{aligned} \text{i) } \vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OD} \cdot \vec{OF} &= \\ &= 4 \times 4 \times \cos 45^\circ + 4 \times 4 \times \cos 90^\circ = \\ &= 16 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \\ &= 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

**Cálculo auxiliar**

$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$\text{ii) } \vec{AB} \cdot \vec{AF} = 4 \times 8 \times \cos 90^\circ = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \vec{DH} \cdot \vec{DF} &= 8 \times 4\sqrt{2} \cos 45^\circ = \\ &= 32\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= 32 \end{aligned}$$

**Cálculos auxiliares**

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{DF}^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{DF}^2 = 32$$

$$\text{Logo, } \overline{DF} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Como  $\overline{HF} = \overline{DF}$  e  $[DH]$  é um diâmetro da circunferência,

$$\widehat{HDF} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{DC} \cdot \vec{DE} &= l \times l \times \cos \widehat{EDC} = \\ &= \left(\sqrt{32} \frac{\sin 22,5^\circ}{\sin 135^\circ}\right)^2 \cos 135^\circ = \\ &= 32 \times \sin^2 22,5^\circ \times \frac{\cos 135^\circ}{\sin^2 135^\circ} = \\ &= 32 \sin^2 22,5^\circ \times \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \\ &= -32\sqrt{2} \sin^2 22,5^\circ \end{aligned}$$

**Cálculos auxiliares**

$$\widehat{EDC} = \frac{180^\circ(8-2)}{8} = 135^\circ$$

$$\widehat{DEC} = \widehat{ECD} = \frac{180^\circ - 135^\circ}{2} = 22,5^\circ$$

$$\overline{CE} = \overline{DF} = \sqrt{32}$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 22,5^\circ}{l} = \frac{\sin 135^\circ}{\sqrt{32}} \Leftrightarrow l = \sqrt{32} \frac{\sin 22,5^\circ}{\sin 135^\circ}$$

$$\text{c) Já foi visto que } l = \sqrt{32} \frac{\sin 22,5^\circ}{\sin 135^\circ}.$$

$\widehat{DAH} = 90^\circ$ , já que o triângulo  $[DAH]$  está inscrito numa semicircunferência.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{DH}^2 = \overline{HA}^2 + \overline{DA}^2 \Leftrightarrow 8^2 = \left(\sqrt{32} \frac{\sin 22,5^\circ}{\sin 135^\circ}\right)^2 + \overline{DA}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{DA}^2 = 64 - 32 \left(\frac{\sin 22,5^\circ}{\sin 135^\circ}\right)^2$$

$$\text{Logo, } \overline{DA} = \sqrt{64 - 32 \left(\frac{\sin 22,5^\circ}{\sin 135^\circ}\right)^2}.$$

$[DH]$  é um diâmetro da circunferência e  $\widehat{GHA} = 135^\circ$ , por se tratar de um ângulo interno do octógono.

$$\text{Logo, } \widehat{DHA} = \frac{135^\circ}{2} = 67,5^\circ.$$

$$\text{Então, } \widehat{HDA} = 180^\circ - 90^\circ - 67,5^\circ = 22,5^\circ$$

$$\text{Assim, } \vec{DH} \cdot \vec{DA} =$$

$$= 8 \times \sqrt{64 - 32 \left(\frac{\sin 22,5^\circ}{\sin 135^\circ}\right)^2} \times \cos 225^\circ \approx 54,62.$$

$$\begin{aligned}
 52. \vec{CF} \cdot \vec{BG} &= \\
 &= (\vec{CB} + \vec{BF}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AG}) = \\
 &= \vec{CB} \cdot \vec{BA} + \vec{CB} \cdot \vec{AG} + \vec{BF} \cdot \vec{BA} + \vec{BF} \cdot \vec{AG} = \\
 &= \|\vec{CB}\| \|\vec{BA}\| \cos 90^\circ + \|\vec{CB}\| \|\vec{AG}\| \cos 180^\circ + \\
 &+ \|\vec{BF}\| \|\vec{BA}\| \cos 0^\circ + \|\vec{BF}\| \|\vec{AG}\| \cos 90^\circ = \\
 &= 0 - \overline{AB} \times \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{AB} + 0 = \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Logo,  $\vec{CF}$  e  $\vec{BG}$  são vetores perpendiculares.

$$\begin{aligned}
 53. \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 &= \\
 &= \|\vec{CA}\|^2 + \|\vec{CB}\|^2 = \\
 &= \vec{CA} \cdot \vec{CA} + \vec{CB} \cdot \vec{CB} = \\
 &= (\vec{CM} + \vec{MA}) \cdot (\vec{CM} + \vec{MA}) + (\vec{CM} + \vec{MB}) \cdot (\vec{CM} + \vec{MB}) = \\
 &= \vec{CM} \cdot \vec{CM} + 2\vec{CM} \cdot \vec{MA} + \vec{MA} \cdot \vec{MA} + \vec{CM} \cdot \vec{CM} + \\
 &+ 2\vec{CM} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MB} = \\
 &= 2\vec{CM} \cdot \vec{CM} + 2\vec{CM} \cdot (\vec{MA} + \vec{MB}) + \vec{MA} \cdot \vec{MA} + \\
 &+ \vec{MB} \cdot \vec{MB} = \\
 &= 2\|\vec{CM}\|^2 + 2\vec{CM} \cdot \vec{0} + \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \frac{1}{2} \overline{AB} = \\
 &= 2\|\vec{CM}\|^2 + 0 + 2 \times \frac{1}{4} \overline{AB} \cdot \overline{AB} = \\
 &= 2\|\vec{CM}\|^2 + \frac{1}{2} \|\vec{AB}\|^2 = \\
 &= 2\overline{CM}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 54. \vec{AM} \cdot \vec{AN} &= \\
 &= (\vec{AB} + \vec{BM}) \cdot (\vec{AD} + \vec{DN}) = \\
 &= \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{DN} + \vec{BM} \cdot \vec{AD} + \vec{BM} \cdot \vec{DN} = \\
 &= \|\vec{AB}\| \times \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \cos 90^\circ + \|\vec{AB}\| \times \\
 &\times \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \cos 0^\circ + \frac{1}{4} \|\vec{AB}\| \times \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \cos 0^\circ + \\
 &+ \frac{1}{4} \|\vec{AB}\| \times \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \cos 90^\circ = \\
 &= 0 + \frac{1}{2} \|\vec{AB}\|^2 + \frac{1}{8} \|\vec{AB}\|^2 + 0 = \\
 &= \frac{5}{8} \|\vec{AB}\|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 55. \|\vec{a} + \vec{b}\| &= \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})} = \\
 &= \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}} = \\
 &= \sqrt{6^2 + 2 \times 0 + 3^2} = \\
 &= \sqrt{45} = \\
 &= 3\sqrt{5} \\
 \|\vec{a} - \vec{b}\| &= \sqrt{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})} = \\
 &= \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}} = \\
 &= \sqrt{6^2 - 2 \times 0 + 3^2} = \\
 &= \sqrt{45} = \\
 &= 3\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 56. \overline{AC}^2 &= \vec{AC} \cdot \vec{AC} = \\
 &= (\vec{BC} - \vec{BA}) \cdot (\vec{BC} - \vec{BA}) = \\
 &= \vec{BC} \cdot \vec{BC} - 2\vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{BA} \cdot \vec{BA} = \\
 &= \|\vec{BC}\|^2 + \|\vec{BA}\|^2 - 2\|\vec{BC}\| \|\vec{BA}\| \cos(\widehat{BC, BA}) = \\
 &= \overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 - 2\overline{BC} \times \overline{BA} \times \cos(\widehat{BC, BA})
 \end{aligned}$$

#### Cálculo auxiliar

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{BC} + \vec{AB} = \vec{BC} - \vec{BA}$$

$$\begin{aligned}
 57. \vec{CB} &= \vec{CD} + \vec{DB} \\
 \vec{AB} &= \vec{AD} + \vec{DB} \\
 \text{Assim:} \\
 \vec{CB} \cdot \vec{AB} &= \\
 &= (\vec{CD} + \vec{DB}) \cdot (\vec{AD} + \vec{DB}) = \\
 &= \vec{CD} \cdot \vec{AD} + \vec{CD} \cdot \vec{DB} + \vec{DB} \cdot \vec{AD} + \vec{DB} \cdot \vec{DB} = \\
 &= \overline{CD} \times \overline{AD} \cos 180^\circ + \overline{CD} \times \overline{DB} \times \cos 90^\circ + \overline{DB} \times \\
 &\times \overline{AD} \cos 90^\circ + \overline{DB} \times \overline{DB} \cos 0^\circ = \\
 &= -\overline{DA} \times \overline{DC} + 0 + 0 + \overline{BD}^2 = \\
 &= -\overline{DA} \times \overline{DC} + \overline{BD}^2
 \end{aligned}$$

Uma vez que  $[ABC]$  é um triângulo retângulo em  $B$ , tem-se:

$$\vec{CB} \cdot \vec{AB} = \overline{CA} \times \overline{CB} \cos 90^\circ = 0$$

Logo:

$$-\overline{DA} \times \overline{DC} + \overline{BD}^2 = 0 \Leftrightarrow \overline{DA} \times \overline{DC} = \overline{BD}^2$$

$$\begin{aligned}
 58. \vec{BA} &= (1, 2) - (4, 6) = (-3, -4) \\
 \|\vec{BA}\| &= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \\
 \text{Seja } D &\text{ o vértice oposto a } B. \\
 D &= A + \vec{BA} = (1, 2) + (-3, -4) = (-2, -2)
 \end{aligned}$$

Sejam  $C$  e  $E$  os restantes vértices.

Uma vez que  $[BCDE]$  é um quadrado, as suas diagonais são perpendiculares e têm o mesmo comprimento.

Seja  $\vec{u}(a, b)$  um vetor não nulo perpendicular a  $\vec{BA}$  e cujo comprimento é igual ao comprimento de  $\vec{BA}$ .

Tem-se então que  $\vec{BA} \cdot \vec{u} = 0$  e  $\|\vec{u}\| = \|\vec{BA}\|$ .

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \vec{BA} \cdot \vec{u} = 0 \\ \|\vec{u}\| = \|\vec{BA}\| \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (-3, -4) \cdot (a, b) = 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -3a - 4b = 0 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{3}b \\ \frac{16}{9}b^2 + b^2 = 25 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Então,  $\vec{u}(-4, 3)$  ou  $\vec{u}(4, -3)$ .

Seja  $\vec{u}(-4, 3)$ .

Então:

$$C = A + \vec{u} = (1, 2) + (-4, 3) = (-3, 5)$$

$$E = A - \vec{u} = (1, 2) - (-4, 3) = (1, 2) + (4, -3) = (5, -1)$$

- 59.** O declive da reta de equação  $y = -\frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$  é  $-\frac{3}{4}$ , pelo que um seu vetor diretor é, por exemplo,  $\vec{r}(4, -3)$ .

Seja  $\vec{u}(a, b)$  o vetor com origem em  $T$  e extremidade no centro de uma circunferência nas condições do enunciado.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{r} \cdot \vec{u} = 0 \\ \|\vec{u}\| = 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (4, -3) \cdot (a, b) = 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 3b = 0 \\ a^2 + b^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4}b \\ \frac{9}{16}b^2 + b^2 = 100 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4}b \\ b^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -6 \\ b = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, os centros das circunferências são os pontos de coordenadas:

$$(-3, -1) + (6, 8) = (3, 7) \text{ e } (-3, -1) + (-6, -8) = (-9, -9)$$

- 60.** Sejam  $r$ ,  $s$  e  $t$ , respetivamente, as retas definidas no enunciado:

$r \cap s$ :

$$\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 2x - \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x - 5 = 6x - 1 \Leftrightarrow 4x = -4$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

$$y = \frac{2}{3} \times (-1) - \frac{5}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$A\left(-1, -\frac{7}{3}\right)$$

$r \cap t$ :

$$\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}x + 5 \Leftrightarrow -2x - 5 = -2x + 15$$

$$\Leftrightarrow 4x = 20$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

$$y = \frac{2}{3} \times 5 - \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

$$C\left(5, \frac{5}{3}\right)$$

$s \cap t$ :

$$2x - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}x + 5 \Leftrightarrow 6x - 1 = -2x + 15$$

$$\Leftrightarrow 8x = 16$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$y = 2 \times 2 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

$$C\left(2, \frac{11}{3}\right)$$

Pretende-se determinar a área do triângulo  $[ABC]$ .

$$\overline{AB} = \sqrt{(5+1)^2 + \left(\frac{5}{3} + \frac{7}{3}\right)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

Seja  $h$  a altura do triângulo  $[ABC]$  relativa ao vértice  $C$ .

$h$  é a distância entre o ponto  $C$  e a reta  $AB = r$ .

Seja  $u$  a reta perpendicular a  $r$  que passa em  $C$ .

$$u: y = -\frac{3}{2}x + b$$

Como  $C$  pertence à reta  $u$ :

$$\frac{11}{3} = -\frac{3}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{20}{3}$$

$$\text{Logo, } u: y = -\frac{3}{2}x + \frac{20}{3}.$$

$r \cap u$ :

$$\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = -\frac{3}{2}x + \frac{20}{3} \Leftrightarrow \frac{13}{6}x = \frac{25}{3}$$

$$\Leftrightarrow 13x = 50$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{50}{13}$$

$$y = \frac{2}{3} \times \frac{50}{13} - \frac{5}{3} = \frac{35}{39}$$

$$D\left(\frac{50}{13}, \frac{35}{39}\right)$$

$$\begin{aligned} h = \overline{CD} &= \sqrt{\left(\frac{50}{13} - 2\right)^2 + \left(\frac{35}{39} - \frac{11}{3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{24}{13}\right)^2 + \left(-\frac{36}{13}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{576}{169} + \frac{1296}{169}} = \sqrt{\frac{144}{13}} \end{aligned}$$

Logo, a área do triângulo  $[ABC]$  é dada por:

$$\frac{\sqrt{52} \times \sqrt{\frac{144}{13}}}{2} = 12 \text{ u.a.}$$

- 61.** Seja  $r$  a reta perpendicular à reta de equação

$$y = \frac{3}{2}x - 6 \text{ e que passa no ponto } A.$$

$$r: y = -\frac{2}{3}x + b$$

Como  $A$  pertence a  $r$ :

$$-5 = -\frac{2}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -\frac{11}{3}$$

$$\text{Então, } r: y = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3}.$$

Seja  $B$  o ponto de interseção da reta  $r$  com a reta definida no enunciado.

$$\frac{3}{2}x - 6 = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3} \Leftrightarrow \frac{13}{6}x = \frac{7}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{14}{13}$$

$$y = \frac{3}{2} \times \frac{14}{13} - 6 = -\frac{57}{13}$$

$$\text{Logo, } B\left(\frac{14}{13}, -\frac{57}{13}\right).$$

A distância do ponto  $A(2, -5)$  à reta de equação

$$y = \frac{3}{2}x - 6 \text{ é igual a } \overline{AB}.$$

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{\left(\frac{14}{13} - 2\right)^2 + \left(-\frac{57}{13} + 5\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(-\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{8}{13}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{144}{169} + \frac{64}{169}} = \\ &= \frac{\sqrt{208}}{13} = \\ &= \frac{4\sqrt{13}}{13}\end{aligned}$$

**62.**  $r: x + y = 5 \Leftrightarrow y = -x + 5$

Como o declive da reta  $r$  é  $-1$ , um vetor diretor desta reta é, por exemplo,  $\vec{r}(1, -1)$ .

$$s: x + 7y = 8 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$$

Como o declive da reta  $s$  é  $-\frac{1}{7}$ , um vetor diretor desta reta é, por exemplo,  $\vec{s}(7, -1)$ .

Seja  $C(a, b)$  o centro da circunferência.

Como as retas  $r$  e  $s$  são tangentes à circunferência, respetivamente, nos pontos  $B$  e  $A$ , tem-se:

$$\begin{cases} \vec{BC} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{AC} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 2, b - 3) \cdot (1, -1) = 0 \\ (a - 1, b - 1) \cdot (7, -1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 - b + 3 = 0 \\ 7a - 7 - b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 1 \\ 7a - 7 - a - 1 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 1 \\ 6a = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{13}{6} \\ a = \frac{7}{6} \end{cases}$$

$$\text{Logo, } C\left(\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right).$$

**63.**  $\|\vec{u}\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = a + b + c$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Logo, } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a + b + c = \frac{3}{2}.$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (a, b, c) \cdot (1, 0, 1) = a + c$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Logo, } \vec{u} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\| \|\vec{w}\| \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow a + c = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a + c = 1.$$

Assim, tem-se:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + b + c = \frac{3}{2} \\ a + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - c)^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ 1 - c + b + c = \frac{3}{2} \\ a = 1 - c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2c + c^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + c^2 = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2 - 2c + \frac{1}{4} = 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 2}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{cases}$$

Assim, os vetores  $\vec{u}$  nas condições do enunciado são:

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) \text{ e}$$

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right).$$

**64.** Um vetor normal ao plano de equação

$$4x - 3y + 12z = 6 \text{ é, por exemplo, } \vec{n}(4, -3, 12).$$

A reta perpendicular ao plano e que contém o ponto  $A$  tem as seguintes equações cartesianas:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-2}{12}$$

As coordenadas do ponto de interseção desta reta com o plano dado são:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 12z = 6 \\ \frac{x-1}{4} = \frac{y-4}{-3} \\ \frac{y-4}{-3} = \frac{z-2}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3 = 4y - 16 \\ -4y + 16 = z - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\left(-\frac{4}{3}y + \frac{19}{3}\right) - 3y + 12(-4y + 18) = 6 \\ x = -\frac{4}{3}y + \frac{19}{3} \\ z = -4y + 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{16}{3}y + \frac{76}{3} - 3y - 48y + 216 = 6 \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 169y = 706 \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{706}{169} \\ x = \frac{129}{169} \\ z = \frac{218}{169} \end{cases}$$

Logo, o ponto de interseção da reta com o plano tem coordenadas  $\left(\frac{129}{169}, \frac{706}{169}, \frac{218}{169}\right)$ .

A distância entre o ponto A e o plano é dada por:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(1 - \frac{129}{169}\right)^2 + \left(4 - \frac{706}{169}\right)^2 + \left(2 - \frac{218}{169}\right)^2} = \\ & = \sqrt{\left(\frac{40}{169}\right)^2 + \left(\frac{30}{169}\right)^2 + \left(\frac{120}{169}\right)^2} = \\ & = \sqrt{\frac{16\,900}{169^2}} = \\ & = \sqrt{\frac{100}{169}} = \frac{10}{13} \end{aligned}$$

- 65.** Para se saber a medida do raio da superfície esférica é necessário determinar a distância entre o seu centro e o plano  $\alpha$ .

O plano  $\alpha$  é definido por  $2x + y + z - 3 = 0$ , logo um vetor normal ao plano  $\alpha$  é, por exemplo,  $\vec{n}(2, 1, 1)$ .

A reta perpendicular ao plano  $\alpha$  e que contém o ponto C tem a seguinte equação vetorial:

$$(x, y, z) = (-1, 0, 4) + k(2, 1, 1), k \in \mathbb{R}$$

Assim, os pontos da reta são da forma:

$$(-1 + 2k, k, 4 + k), k \in \mathbb{R}$$

Substituindo na equação do plano:

$$\begin{aligned} 2(-1 + 2k) + k + 4 + k - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2 + 4k + k + 4 + k - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 6k &= 1 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Logo, o ponto de interseção da reta com o plano tem coordenadas  $\left(-1 + \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, 4 + \frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{25}{6}\right)$ .

Assim, a distância entre o ponto C e o plano é dada por:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(-1 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(4 - \frac{25}{6}\right)^2} = \\ & = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

Logo, o raio da superfície esférica é  $\sqrt{\frac{1}{6}}$  e a sua equação é  $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = \frac{1}{6}$ .

$$66. \vec{AB} = \left(0, 1, \frac{5}{2}\right) - (0, 0, 2) = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{AC} = (6, 6, 2) - (0, 0, 2) = (6, 6, 0)$$

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{AC}$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot \left(0, 1, \frac{1}{2}\right) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (6, 6, 0) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} b + \frac{1}{2}c = 0 \\ 6a + 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ a = -b \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,  $\vec{u}(-b, b, -2b)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

Por exemplo, se  $b = -1$ , obtém-se  $\vec{u}(1, -1, 2)$ .

Então,  $\vec{u}(1, -1, 2)$  é um vetor normal ao plano ABC e  $(0, 0, 2)$  é um ponto do plano:

$$1(x - 0) - 1(y - 0) + 2(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z - 4 = 0$$

Assim, para que D seja coplanar com os pontos A, B e C tem de pertencer ao plano ABC:

$$m - m + 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

## 67.

- a) Um vetor diretor da reta  $r$  é, por exemplo,  $\vec{r}(-1, 2, 1)$ . Um vetor diretor da reta  $s$  é, por exemplo,  $\vec{s}(2, 1, 1)$ .

Estes dois vetores não são colineares, já que

$$\frac{-1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{1}{1}. \text{ Logo, as retas não são paralelas.}$$

Substituindo, na equação da reta  $r$ ,  $x$ ,  $y$  e  $z$  por

$$\begin{cases} x = -1 + 2k' \\ y = 2 + k' \\ z = k' \end{cases} \quad (\text{ponto genérico da reta } s), \text{ obtém-se:}$$

$$\begin{cases} -1 + 2k' = 1 - k \\ 2 + k' = 2k \\ k' = -\frac{4}{5} + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k' = 2 - k \\ k' = 2k - 2 \\ 2k - 2 = -\frac{4}{5} + k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ k' = 2 \times \frac{6}{5} - 2 \\ k = \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times \frac{2}{5} = 2 - \frac{6}{5} \\ k' = \frac{2}{5} \\ k = \frac{6}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \\ k' = \frac{2}{5} \\ k = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Assim, as retas  $r$  e  $s$  são retas concorrentes.

- b)** Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$ .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 2, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 1, 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b + c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a - 2b \\ 2a + b + a - 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = a - 6b \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -5a \\ b = 3a \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}(a, 3a, -5a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Por exemplo, se  $a = -1$ , obtém-se  $\vec{u}(-1, -3, 5)$ .

Então,  $\vec{u}(-1, -3, 5)$  é um vetor normal ao plano e  $(-1, 2, 0)$  (ponto pertencente à reta  $s$ ) é um ponto do plano:

$$-1(x+1) - 3(y-2) + 5(z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x - 1 - 3y + 6 + 5z = 0$$

$\Leftrightarrow -x - 3y + 5z + 5 = 0$ , que é a equação cartesiana do plano definido pelas retas  $r$  e  $s$ .

- 68.** Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(-5, p, 0)$ .

Um vetor normal ao plano  $\alpha$  é  $\vec{n}(1, p, -1)$ .

Para que a interseção da reta com o plano seja um conjunto vazio, a reta tem de ser estritamente paralela ao plano, ou seja, estes dois vetores têm de ser perpendiculares.

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (-5, p, 0) \cdot (1, p, -1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -5 + p^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = \sqrt{5} \vee p = -\sqrt{5}$$

- 69.** De acordo com a sugestão do enunciado,  $A(a, 0, 0)$ ,

$$C(0, a, 0), V\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 3a\right).$$

$$\vec{AC} = (-a, a, 0)$$

$$\vec{AV} = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 3a\right)$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-a)^2 + a^2 + 0^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$$

$$\|\vec{AV}\| = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (3a)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{19}{2}}a$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{AV} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + 0 = a^2$$

Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo que uma aresta lateral faz com a diagonal da base concorrente com ela.

$$\cos \alpha = \frac{a^2}{\sqrt{2}a \times \sqrt{\frac{19}{2}}a} =$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{19}a^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{19}}$$

Assim,  $\alpha \approx 76,74^\circ$ .

## 70.

- a)** Para que o raio da circunferência de interseção do plano  $\alpha$  com a superfície esférica seja  $\sqrt{3}$ , basta que uma das parcelas que compõem a equação da superfície esférica seja igual a 1.

Assim:

$$\bullet \text{ se } (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \vee x-1 = -1$$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 0$ , obtém-se, por exemplo, o plano de equação  $x = 2$ , para o qual a interseção do plano  $\alpha$  com a superfície esférica é uma circunferência de raio  $\sqrt{3}$ .

$$\bullet \text{ se } (y-2)^2 = 1 \Leftrightarrow y-2 = 1 \vee y-2 = -1$$

$\Leftrightarrow y = 3 \vee y = 1$ , obtém-se, por exemplo, o plano de equação  $y = 3$ , para o qual a interseção do plano  $\alpha$  com a superfície esférica é uma circunferência de raio  $\sqrt{3}$ .

$$\bullet \text{ se } z^2 = 1 \Leftrightarrow z = 1 \vee z = -1, \text{ obtém-se, por exemplo, o plano de equação } z = 1, \text{ para o qual a interseção do plano } \alpha \text{ com a superfície esférica é uma circunferência de raio } \sqrt{3}.$$

- b)** Um vetor normal do plano cuja equação se pretende escrever é  $(1, 1, 0)$ , por exemplo, uma vez que este plano é paralelo ao plano  $\alpha$ .

Este vetor é o vetor diretor de uma reta que passa pelo ponto de tangência do plano com a superfície esférica e pelo centro desta, sendo uma equação vetorial dessa reta:

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + k(1, 1, 0), k \in \mathbb{R}$$

Os pontos desta reta são da forma  $(1+k, 2+k, 0)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .



O ponto de tangência pertence a esta reta e à superfície esférica, logo:

$$(1 + k - 1)^2 + (2 + k - 2)^2 + 0^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow k^2 + k^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow k = \sqrt{2} \vee k = -\sqrt{2}$$

Seja  $k = \sqrt{2}$  (para  $k = -\sqrt{2}$  obter-se-ia um outro ponto de tangência, diametralmente oposto ao que se vai determinar). Então, as coordenadas do ponto de tangência são  $(1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 0)$ .

Assim, uma equação cartesiana de um plano tangente à superfície esférica e paralelo ao plano  $\alpha$ :  $x + y = 0$  é:

$$1(x - 1 - \sqrt{2}) + 1(y - 2 - \sqrt{2}) + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 - \sqrt{2} + y - 2 - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - 3 - 2\sqrt{2} = 0$$

## 71.

a) O ponto  $A$  pertence ao eixo  $Ox$ , logo é da forma  $(x, 0, 0)$ . Substituindo na equação do plano  $ABC$ :

$$2x + 0 + 0 = 8 \Leftrightarrow x = 4$$

Logo,  $A(4, 0, 0)$ .

O ponto  $B$  pertence ao eixo  $Oy$ , logo é da forma  $(0, y, 0)$ . Substituindo na equação do plano  $ABC$ :

$$0 + 2y + 0 = 8 \Leftrightarrow y = 4$$

Logo,  $B(0, 4, 0)$ .

O ponto  $C$  pertence ao eixo  $Oz$ , logo é da forma  $(0, 0, z)$ . Substituindo na equação do plano  $ABC$ :

$$0 + 0 + z = 8 \Leftrightarrow z = 8$$

Logo,  $C(0, 0, 8)$ .

b) Se o plano é paralelo ao plano  $ABC$ , então tem como vetor normal, por exemplo,  $\vec{n}(2, 2, 1)$ , que é um vetor normal ao plano  $ABC$ .

Assim, uma equação cartesiana do plano que passa no ponto  $D(-1, 1, 2)$  e é paralelo ao plano  $ABC$  é:

$$2(x + 1) + 2(y - 1) + 1(z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2 + 2y - 2 + z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y + z = 2$$

c)  $M = \left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (2, 2, 0)$

$$\vec{CM} = (2, 2, 0) - (0, 0, 8) = (2, 2, -8)$$

Logo, uma equação vetorial da reta  $CM$  é:

$$(x, y, z) = (0, 0, 8) + k(2, 2, -8), k \in \mathbb{R}$$

d) Uma reta que passe pela origem do referencial e seja perpendicular ao plano  $ABC$  é definida pela equação vetorial  $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(2, 2, 1)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Os pontos desta reta são da forma  $(2k, 2k, k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . O ponto  $P$  é um desses pontos e pertence ao plano  $ABC$ , logo:

$$2 \times 2k + 2 \times 2k + k = 8 \Leftrightarrow 9k = 8$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{8}{9}$$

$$\text{Assim, } P\left(\frac{16}{9}, \frac{16}{9}, \frac{8}{9}\right).$$

O raio da esfera é dado por:

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{576}{81}} = \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Logo, uma condição que define a esfera é:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{64}{9}$$

## 72.

a) Um vetor normal ao plano  $\alpha$  é, por exemplo,  $\vec{n}(3, 2, 6)$ .

Um vetor normal ao plano  $\beta$  é, por exemplo,

$$\vec{m}(1, 1, -1).$$

$$\vec{n} \cdot \vec{m} = 3 + 2 - 6 = -1$$

Logo, os planos  $\alpha$  e  $\beta$  não são perpendiculares.

b)  $VC$  é uma reta perpendicular ao plano  $\alpha$ . Assim, um vetor diretor de  $VC$  é o vetor  $\vec{n}(3, 2, 6)$ . Como  $C$  pertence a esta reta, uma equação vetorial de  $VC$  é:

$$(x, y, z) = \left(1, 3, -\frac{1}{2}\right) + k(3, 2, 6), k \in \mathbb{R}$$

Os pontos da reta  $VC$ , e também em particular o ponto  $V$ , são da forma  $\left(1 + 3k, 3 + 2k, -\frac{1}{2} + 6k\right)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Assim, } \vec{CV} = (3k, 2k, 6k), k \in \mathbb{R}.$$

$$\|\vec{CV}\| = 14 \Leftrightarrow \sqrt{(3k)^2 + (2k)^2 + (6k)^2} = 14$$

$$\Leftrightarrow 49k^2 = 196$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow k = 2 \vee k = -2$$

Como  $C$  pertence ao primeiro octante,  $k = \frac{14}{7}$ .

Logo:

$$\begin{aligned} V &= \left(1 + 3 \times 2, 3 + 2 \times 2, -\frac{1}{2} + 6 \times 2\right) = \\ &= \left(7, 7, \frac{23}{2}\right) \end{aligned}$$

c) Se o plano  $\gamma$  é paralelo ao plano  $\alpha$ , então um seu vetor diretor é  $\vec{n}(3, 2, 6)$ .

O ponto  $V$  pertence ao plano  $\gamma$ .

Então, uma equação do plano  $\gamma$  que contém o ponto  $V$  e é paralelo ao plano  $\alpha$  é:

$$3(x - 7) + 2(y - 7) + 6\left(z - \frac{23}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 21 + 2y - 14 + 6z - 69 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y + 6z - 104 = 0$$

## Tema III - Sucessões

### Unidade 1 - Propriedades elementares de sucessões reais

Páginas 6 a 18

1.

a)  $u_1 = -10 = -10 \times 1$   
 $u_2 = -20 = -10 \times 2$   
 $u_3 = -30 = -10 \times 3$   
 E assim sucessivamente.  
 Logo,  $u_n = -10n$ .

b)  $u_1 = 1 = \frac{1}{2 \times 1 - 1}$   
 $u_2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \times 2 - 1}$   
 $u_3 = \frac{1}{5} = \frac{1}{2 \times 3 - 1}$   
 E assim sucessivamente.  
 Logo,  $u_n = \frac{1}{2n - 1}$ .

c)  $u_1 = \frac{4}{3} = \frac{1 + 3}{3^1}$   
 $u_2 = \frac{5}{9} = \frac{2 + 3}{3^2}$   
 $u_3 = \frac{6}{27} = \frac{3 + 3}{3^3}$   
 E assim sucessivamente.  
 Logo,  $u_n = \frac{n + 3}{3^n}$ .

2.

a)  $u_n = 2n - 1$   
 $u_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$   
 $u_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$   
 $u_3 = 2 \times 3 - 1 = 5$   
 $u_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$   
 $u_5 = 2 \times 5 - 1 = 9$

b)  $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$   
 $v_1 = 1 + \frac{1}{1^2} = 2$   
 $v_2 = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$   
 $v_3 = 1 + \frac{1}{3^2} = \frac{10}{9}$   
 $v_4 = 1 + \frac{1}{4^2} = \frac{17}{16}$   
 $v_5 = 1 + \frac{1}{5^2} = \frac{26}{25}$

c)  $w_n = \sqrt{n}$   
 $w_1 = \sqrt{1} = 1$   
 $w_2 = \sqrt{2}$

$$w_3 = \sqrt{3}$$

$$w_4 = \sqrt{4} = 2$$

$$w_5 = \sqrt{5}$$

d)  $t_n = \frac{(-1)^n}{n}$   
 $t_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1$   
 $t_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$   
 $t_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}$   
 $t_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$   
 $t_5 = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5}$

e)  $s_n = \cos(n\pi)$   
 $s_1 = \cos(1\pi) = -1$   
 $s_2 = \cos(2\pi) = 1$   
 $s_3 = \cos(3\pi) = -1$   
 $s_4 = \cos(4\pi) = 1$   
 $s_5 = \cos(5\pi) = -1$

3.

a)  $u_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 1 & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$   
 $u_1 = 0$   
 $u_2 = 1$   
 $u_3 = 0$   
 $u_4 = 1$   
 $u_5 = 0$   
 $u_{2018} = 1$

b)  $v_n = \begin{cases} n^3 + 1 & \text{se } n \text{ ímpar} \\ -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$   
 $v_1 = 1^3 + 1 = 2$   
 $v_2 = -\frac{1}{2}$   
 $v_3 = 3^3 + 1 = 28$   
 $v_4 = -\frac{1}{4}$   
 $v_5 = 5^3 + 1 = 126$   
 $v_{2018} = -\frac{1}{2018}$

c)  $w_n = \begin{cases} |n - 3| & \text{se } n < 10 \\ \frac{n}{2} & \text{se } n \geq 10 \end{cases}$   
 $w_1 = |1 - 3| = 2$   
 $w_2 = |2 - 3| = 1$   
 $w_3 = |3 - 3| = 0$   
 $w_4 = |4 - 3| = 1$

$$w_5 = |5 - 3| = 2$$

$$w_{2018} = \frac{2018}{2} = 1009$$

$$4. u_n = \frac{13 - 2n}{4n + 1}$$

$$a) u_{10} = \frac{13 - 2 \times 10}{4 \times 10 + 1} = -\frac{7}{41}$$

$$b) u_n = 10 \Leftrightarrow \frac{13 - 2n}{4n + 1} = 10$$

$$\Leftrightarrow 13 - 2n = 40n + 10$$

$$\Leftrightarrow 42n = 3$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1}{14} (\notin \mathbb{N})$$

Logo, 10 não é um termo da sucessão.

$$c) u_5 - u_{20} = \frac{13 - 2 \times 5}{4 \times 5 + 1} - \frac{13 - 2 \times 20}{4 \times 20 + 1} = \frac{1}{7} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{21}$$

$$d) u_{n-1} = \frac{13 - 2 \times (n-1)}{4 \times (n-1) + 1} = \frac{13 - 2n + 2}{4n - 4 + 1} = \frac{15 - 2n}{4n - 3}$$

$$u_{2n} = \frac{13 - 2 \times 2n}{4 \times 2n + 1} = \frac{13 - 4n}{8n + 1}$$

$$e) u_n < 0 \Leftrightarrow \frac{13 - 2n}{4n + 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow 13 - 2n < 0$$

$$\Leftrightarrow -2n < -13$$

$$\Leftrightarrow 2n > 13$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{13}{2}$$

O primeiro número natural maior que  $\frac{13}{2}$  é 7.

Logo, a partir da ordem 7 todos os termos da sucessão são negativos.

$$5. u_n = \sqrt{2n^2 + 1}; v_n = n - 3$$

$$a) u_n = 17 \Leftrightarrow \sqrt{2n^2 + 1} = 17$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 + 1 = 289$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 = 288$$

$$\Leftrightarrow n^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow n = 12 \vee n = -12$$

Como  $n \in \mathbb{N}$ , então  $n = 12$ , ou seja, 17 é o termo de ordem 12 da sucessão  $(u_n)$ .

$$v_n = 17 \Leftrightarrow n - 3 = 17 \Leftrightarrow n = 20$$

17 é o termo de ordem 20 da sucessão  $(v_n)$ .

$$b) u_p = v_p \Leftrightarrow \sqrt{2p^2 + 1} = p - 3$$

$$\Leftrightarrow 2p^2 + 1 = p^2 - 6p + 9$$

$$\Leftrightarrow p^2 + 6p - 8 = 0$$

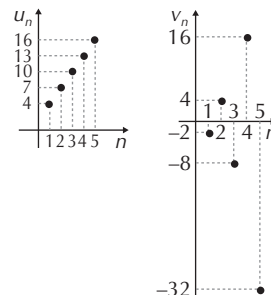
$$\Leftrightarrow p = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 32}}{2}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{-6 \pm 2\sqrt{17}}{2}$$

$$\Leftrightarrow p = -3 + \sqrt{17} \vee p = -3 - \sqrt{17}$$

Como  $-3 + \sqrt{17} \notin \mathbb{N}$  e  $-3 - \sqrt{17} \notin \mathbb{N}$ , então a equação é impossível em  $\mathbb{N}$ . Logo, a proposição dada é falsa.

$$6. u_n = 3n + 1; v_n = (-2)^n$$



7.

$$a) u_n = \frac{1}{2}n + 1$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(n+1) + 1 - \left(\frac{1}{2}n + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}n - 1 = \frac{1}{2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo,  $(u_n)$  é crescente.

$$b) v_n = \frac{2}{n+1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} =$$

$$= \frac{2n+2-2n-4}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{-2}{(n+2)(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo,  $(v_n)$  é decrescente.

$$c) w_n = (-1)^n \times n$$

$$w_1 = -1$$

$$w_2 = 2$$

$$w_3 = -3$$

Tem-se que  $w_2 - w_1 > 0$  e  $w_3 - w_2 < 0$ , logo a sucessão  $(w_n)$  não é monótona.

8.

$$a) u_n = \frac{2n-5}{3n+4}$$

$$u_{n+1} - u_n =$$

$$= \frac{2(n+1)-5}{3(n+1)+4} - \frac{2n-5}{3n+4} =$$

$$= \frac{2n-3}{3n+7} - \frac{2n-5}{3n+4} =$$

$$= \frac{(2n-3)(3n+4) - (2n-5)(3n+7)}{(3n+7)(3n+4)} =$$

$$= \frac{6n^2 + 8n - 9n - 12 - 6n^2 - 14n + 15n + 35}{(3n+7)(3n+4)} =$$

$$= \frac{23}{(3n+7)(3n+4)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo,  $(u_n)$  é crescente.

$$b) u_n = \frac{10n-5}{5n-3}$$

$$u_{n+1} - u_n =$$

$$= \frac{10(n+1)-5}{5(n+1)-3} - \frac{10n-5}{5n-3} =$$

$$= \frac{10n+5}{5n+2} - \frac{10n-5}{5n-3} =$$

$$= \frac{(10n+5)(5n-3) - (10n-5)(5n+2)}{(5n+2)(5n-3)} =$$

$$= \frac{50n^2 - 30n + 25n - 15 - 50n^2 - 20n + 25n + 10}{(5n+2)(5n-3)} =$$

$$= \frac{-5}{(5n+2)(5n-3)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo,  $(u_n)$  é decrescente.

$$c) u_n = \frac{(-2)^n}{n}$$

$$u_1 = \frac{-2}{1} = -2$$

$$u_2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$u_3 = -\frac{8}{3}$$

Tem-se que  $u_2 - u_1 > 0$  e  $u_3 - u_2 < 0$ , logo a sucessão  $(u_n)$  não é monótona.

$$d) u_n = (n+10)^2$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+11)^2 - (n+10)^2 = \\ &= n^2 + 22n + 121 - n^2 - 20n - 100 = \\ &= 2n + 21 > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo,  $(u_n)$  é crescente.

$$e) u_n = (n-10)^2$$

$$u_9 = 1$$

$$u_{10} = 0$$

$$u_{11} = 1$$

Tem-se que  $u_{10} - u_9 < 0$  e  $u_{11} - u_{10} > 0$ , logo a sucessão  $(u_n)$  não é monótona.

$$9. u_n = \begin{cases} n^2 & \text{se } n \leq 4 \\ 2n & \text{se } n > 4 \end{cases}; v_n = \begin{cases} 2n & \text{se } n \leq 4 \\ 3n & \text{se } n > 4 \end{cases}$$

$$u_3 = 9$$

$$u_4 = 16$$

$$u_5 = 10$$

Tem-se que  $u_4 - u_3 > 0$  e  $u_5 - u_4 < 0$ , logo a sucessão  $(u_n)$  não é monótona.

Se  $n < 4$ , então  $v_{n+1} - v_n = 2n + 2 - 2n = 2 > 0$ .

Se  $n > 4$ , então  $v_{n+1} - v_n = 3n + 3 - 3n = 3 > 0$

$$v_5 - v_4 = 15 - 8 = 7 > 0$$

Logo,  $v_{n+1} - v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $(v_n)$  é crescente.

$$10. A = ]-2, 9] \cup \{12\}$$

a) Por exemplo, 13 e 100 são majorantes de  $A$ .  
Por exemplo, -100 e -2 são minorantes de  $A$ .

b) O conjunto dos majorantes de  $A$  é  $[12, +\infty[$ .  
O conjunto dos minorantes de  $A$  é  $]-\infty, -2]$ .

$$11. B = ]-\infty, 1]$$

a) Por exemplo,  $\frac{3}{2}$  e  $\pi$  são majorantes de  $B$ .  
 $B$  não tem minorantes.

b) O conjunto dos majorantes de  $B$  é  $[1, +\infty[$ .

12. O ínfimo de  $C$  é 3 e o supremo de  $C$  é 7.

13.

a) Um conjunto majorado, mas não limitado é, por exemplo,  $]-\infty, 1]$ .

b) Um conjunto minorado, mas não limitado é, por exemplo,  $]2, +\infty[$ .

c) Um conjunto limitado é, por exemplo,  $[3, 4[$ .

14.

$$a) ]-\infty, 1]$$

O máximo deste conjunto é 1 e não tem mínimo.

$$b) ]2, +\infty[$$

Este conjunto não tem máximo nem mínimo.

$$c) [3, 4[$$

O mínimo deste conjunto é 3 e não tem máximo.

15.

$$a) a_n = n^2 + 1$$

$$a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 10, a_4 = 17, \dots$$

O conjunto dos minorantes de  $(a_n)$  é  $]-\infty, 2]$ .  
 $(a_n)$  não tem majorantes.

$$b) b_n = -3n$$

$$b_1 = -3, b_2 = -6, b_3 = -9, b_4 = -12, \dots$$

O conjunto dos majorantes de  $(b_n)$  é  $[-3, +\infty[$ .  
 $(b_n)$  não tem minorantes.

$$c) c_n = (-1)^n$$

$$c_1 = -1, c_2 = 1, c_3 = -1, c_4 = 1, \dots$$

O conjunto dos minorantes de  $(c_n)$  é  $]-\infty, -1]$ .  
O conjunto dos majorantes de  $(c_n)$  é  $[1, +\infty[$ .

$$d) d_n = (-2)^n$$

$$d_1 = -2, d_2 = 4, d_3 = -8, d_4 = 16, \dots$$

$(d_n)$  não tem minorantes nem majorantes.

16. Uma vez que a sucessão  $(u_n)$  é crescente, então  $u_1 \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado, todos os seus termos são inferiores a 2017, ou seja,  $u_n < 2017, \forall n \in \mathbb{N}$ . Então,  $(u_n)$  é limitada, pois  $u_1 \leq u_n < 2017, \forall n \in \mathbb{N}$ .

17.

a)  $a_n = \frac{3n+1}{n} = 3 + \frac{1}{n}$

Sabe-se que  $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Logo,  $3 < 3 + \frac{1}{n} \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Assim, a sucessão  $(a_n)$  é limitada.

b)  $b_n = \frac{2n}{n+3} = \frac{2n+6-6}{n+3} = 2 - \frac{6}{n+3}$

Sabe-se que  $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Então,  $0 < \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 > -\frac{6}{n+3} \geq -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 2 > 2 - \frac{6}{n+3} \geq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Assim, a sucessão  $(b_n)$  é limitada.

c)  $c_n = \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

Como  $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ , então  $0 > -\frac{1}{n} \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Logo,  $-1 \leq c_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Assim, a sucessão  $(c_n)$  é limitada.

d)  $d_n = \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) - 1$

Tem-se que  $-1 \leq \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Logo,  $-2 \leq \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) - 1 \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Assim, a sucessão  $(d_n)$  é limitada.

18. Sabemos que  $(w_n)$  é uma sucessão de termos negativos tal que  $\frac{6}{w_n} < -2$ , para todo o número natural  $n$ .

Assim,  $\frac{6}{w_n} < -2 \Leftrightarrow \frac{w_n}{6} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow w_n > -3$ .

Tem-se, então, que  $0 > w_n > -3, \forall n \in \mathbb{N}$ , ou seja, a sucessão  $(w_n)$  é limitada.

19.  $u_n = \frac{3n+1}{2n+3}$

$|u_n| \leq L \Leftrightarrow \frac{3n+1}{2n+3} \leq L$

$\Leftrightarrow 3n+1 \leq 2nL+3L$

$$\Leftrightarrow 3n - 2nL \leq 3L - 1$$

$$\Leftrightarrow n(3 - 2L) \leq 3L - 1$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{3L-1}{3-2L} \wedge 3-2L < 0$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{3L-1}{3-2L} \wedge L > \frac{3}{2}$$

Tomando, por exemplo,  $L = 2$ , vem que

$n \geq \frac{3 \times 2 - 1}{3 - 2 \times 2}$ , ou seja,  $n \geq -5$ , que é uma condição

universal em  $\mathbb{N}$ .

Conclui-se, assim, que existe um número real positivo  $L$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq L$ .

## Unidade 2 - Princípio de indução matemática

Páginas 19 a 25

20.

a)  $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \times 7^n = (2 \times 7)^n$

Seja  $P(n): 2^n \times 7^n = (2 \times 7)^n$ .

$P(1): 2^1 \times 7^1 = (2 \times 7)^1 \Leftrightarrow 2 \times 7 = 2 \times 7$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $2^n \times 7^n = (2 \times 7)^n$

**Tese:**  $2^{n+1} \times 7^{n+1} = (2 \times 7)^{n+1}$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} 2^{n+1} \times 7^{n+1} &= 2^n \times 2 \times 7^n \times 7 = \\ &= 2^n \times 7^n \times 2 \times 7 = \\ &= (2 \times 7)^n \times (2 \times 7) = \\ &= (2 \times 7)^{n+1} \end{aligned}$$

Logo,  $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \times 7^n = (2 \times 7)^n$ .

- b) Dado  $n \in \mathbb{N}$ , a soma dos  $n$  primeiros termos da sucessão dos números naturais é igual a  $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$ .

Seja  $P(n): S_n = \frac{n^2 + n}{2}$ .

$P(1): 1 = \frac{1^2 + 1}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{2} \Leftrightarrow 1 = 1$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$

**Tese:**  $S_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2}$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1) = \\ &= \frac{n^2 + n}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \\ &= \frac{(n^2 + 2n + 1) + (n+1)}{2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2}$$

Logo, dado  $n \in \mathbb{N}$ , a soma dos  $n$  primeiros termos da sucessão dos números naturais é igual a

$$S_n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

$$c) \forall n \in \mathbb{N}, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\text{Seja } P(n): 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

$$P(1): 1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 1 = 1^2 \Leftrightarrow 1 = 1$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\text{Tese: } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

**Demonstração:**

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 =$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 =$$

$$= \left(\frac{n}{2}\right)^2 \times (n+1)^2 + (n+1)^3 =$$

$$= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) =$$

$$= (n+1)^2 \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4}\right) =$$

$$= (n+1)^2 \left(\frac{(n+2)^2}{4}\right) =$$

$$= (n+1)^2 \left(\frac{(n+2)}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\text{Logo, } \forall n \in \mathbb{N}, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

$$d) \forall n \in \mathbb{N}, 3n^2 + n - 2 \text{ é um número par.}$$

Seja  $P(n): 3n^2 + n - 2$  é um número par.

$P(1): 3 \times 1^2 + 1 - 2 = 2$  é um número par.

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $3n^2 + n - 2$  é um número par.

**Tese:**  $3(n+1)^2 + (n+1) - 2$  é um número par.

**Demonstração:**

$$3(n+1)^2 + (n+1) - 2 = 3(n^2 + 2n + 1) + n + 1 - 2 =$$

$$= 3n^2 + 7n + 2 =$$

$$= (3n^2 + n - 2) + (6n + 4) =$$

$$= (3n^2 + n - 2) + 2(3n + 2)$$

Por hipótese,  $3n^2 + n - 2$  é um número par. Além disso,  $2(3n + 2)$  é um número par.

A soma de dois números pares é um número par.

Logo,  $(3n^2 + n - 2) + 2(3n + 2)$  é um número par, ou

seja,  $3(n+1)^2 + (n+1) - 2$  é um número par.

Logo,  $\forall n \in \mathbb{N}, 3n^2 + n - 2$  é um número par.

$$e) \forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n \text{ é divisível por 3.}$$

Seja  $P(n): n^3 - n$  é divisível por 3.

$P(1): 1^3 - 1 = 0$  é divisível por 3.

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $n^3 - n$  é divisível por 3.

**Tese:**  $(n+1)^3 - (n+1)$  é divisível por 3.

**Demonstração:**

$$(n+1)^3 - (n+1) = (n+1)(n^2 + 2n + 1) - n - 1 =$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 =$$

$$= (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$$

Por hipótese,  $n^3 - n$  é divisível por 3. Além disso,

$3(n^2 + n)$  é divisível por 3.

A soma de dois números divisíveis por 3 é um número divisível por 3.

Logo,  $(n^3 - n) + 3(n^2 + n)$  é divisível por 3, ou seja,

$(n+1)^3 - (n+1)$  é divisível por 3.

Logo,  $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$  é divisível por 3.

$$f) \forall n \in \mathbb{N}, (2^{n+2} + 3^{2n+1}) \text{ é múltiplo de 7.}$$

Seja  $P(n): (2^{n+2} + 3^{2n+1})$  é múltiplo de 7.

$P(1): 2^{1+2} + 3^{2+1} = 8 + 27 = 35$  é múltiplo de 7.

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $(2^{n+2} + 3^{2n+1})$  é múltiplo de 7.

**Tese:**  $(2^{n+3} + 3^{2n+3})$  é múltiplo de 7.

**Demonstração:**

$$2^{n+3} + 3^{2n+3} = 2^{n+2} \times 2 + 3^{2n+1} \times 9 =$$

$$= 2^{n+2} \times 2 + 3^{2n+1} \times (2 + 7) =$$

$$= 2^{n+2} \times 2 + 3^{2n+1} \times 2 + 3^{2n+1} \times 7 =$$

$$= (2^{n+2} + 3^{2n+1}) \times 2 + 3^{2n+1} \times 7$$

Por hipótese,  $(2^{n+2} + 3^{2n+1})$  é múltiplo de 7, logo

$(2^{n+2} + 3^{2n+1}) \times 2$  é múltiplo de 7. Além disso,

$3^{2n+1} \times 7$  é múltiplo de 7. A soma de dois números

múltiplos de 7 é um múltiplo de 7.

Logo,  $(2^{n+3} + 3^{2n+3})$  é múltiplo de 7.

Logo,  $\forall n \in \mathbb{N}, (2^{n+2} + 3^{2n+1})$  é múltiplo de 7.

$$21. \text{ Seja } P(n): 9^n - 1 \text{ é um múltiplo de 8.}$$

$P(1): 9^1 - 1 = 8$ , que é um múltiplo de 8.

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $9^n - 1$  é um múltiplo de 8.

**Tese:**  $9^{n+1} - 1$  é um múltiplo de 8.

**Demonstração:**

$$9^{n+1} - 1 = 9^n \times 9 - 1 =$$

$$= 9^n \times 9 - 9 + 9 - 1 =$$

$$= 9(9^n - 1) + 8$$

Como, por hipótese,  $9^n - 1$  é um múltiplo de 8 e 8

é um múltiplo de 8, então  $9(9^n - 1) + 8$  é um múltiplo

de 8, por se tratar da soma de dois múltiplos

de 8.

Logo,  $9^n - 1$  é, para todo o número natural  $n$ , um múltiplo de 8.

**22.** Seja  $P(n)$ :  $n^2 > 2n$ .

$$P(3): 3^2 > 2 \times 3 \Leftrightarrow 9 > 6$$

Logo,  $P(3)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $n^2 > 2n$

**Tese:**  $(n+1)^2 > 2(n+1)$

**Demonstração:**

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > 2n + 2n + 1 > 4n + 1$$

Basta então provar que  $4n + 1 > 2(n+1)$ .

$$4n + 1 > 2(n+1) \Leftrightarrow 4n + 1 > 2n + 2 \Leftrightarrow 2n > 0$$

$\Leftrightarrow n > 0$ , o que é verdade  $\forall n \geq 3$ .

Logo,  $n^2 > 2n, \forall n \in \mathbb{N}_3$ .

**23.**  $t_1 = 1$

$$t_2 = 1 + 2 = 3$$

$$t_3 = 3 + 3 = 6$$

$$t_4 = 6 + 4 = 10$$

...

Logo:

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + n, \forall n > 1 \end{cases}$$

**24.**

**a)**  $a_n = 2n + 1$

$$a_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$a_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$a_4 = 2 \times 4 + 1 = 9$$

$$a_5 = 2 \times 5 + 1 = 11$$

Logo:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

**b)**  $b_n = 3^n$

$$b_1 = 3^1 = 3$$

$$b_2 = 3^2 = 9$$

$$b_3 = 3^3 = 27$$

$$b_4 = 3^4 = 81$$

$$b_5 = 3^5 = 243$$

Logo:

$$\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_n = 3b_{n-1}, \forall n > 1 \end{cases}$$

**25.**

$$\text{a) } \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 3, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

$$a_1 = 5 (= 3 \times 1 + 2)$$

$$a_2 = 5 + 3 = 8 (= 3 \times 2 + 2)$$

$$a_3 = 8 + 3 = 11 (= 3 \times 3 + 2)$$

$$a_4 = 11 + 3 = 14 (= 3 \times 4 + 2)$$

$$a_5 = 14 + 3 = 17 (= 3 \times 5 + 2)$$

Logo,  $a_n = 3n + 2$ .

$$\text{b) } \begin{cases} b_1 = 3 \\ b_n = 2 + b_{n-1}, \forall n > 1 \end{cases}$$

$$b_1 = 3 (= 2 \times 1 + 1)$$

$$b_2 = 2 + 3 = 5 (= 2 \times 2 + 1)$$

$$b_3 = 2 + 5 = 7 (= 2 \times 3 + 1)$$

$$b_4 = 2 + 7 = 9 (= 2 \times 4 + 1)$$

$$b_5 = 2 + 9 = 11 (= 2 \times 5 + 1)$$

Logo,  $b_n = 2n + 1$ .

$$\text{26. } u_1 = 1 \wedge u_{n+1} = \frac{4 + 2u_n}{4}$$

**a)** Seja  $P(n)$ :  $u_n < 2$ .

$$P(1): u_1 < 2 \Leftrightarrow 1 < 2$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $u_n < 2$

**Tese:**  $u_{n+1} < 2$

**Demonstração:**

Por hipótese,  $u_n < 2$ .

Então:

$$2u_n < 4 \Leftrightarrow 4 + 2u_n < 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 + 2u_n}{4} < 2$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} < 2$$

Logo,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 2$

$$\begin{aligned} \text{b) } u_{n+1} - u_n &= \frac{4 + 2u_n}{4} - u_n = \\ &= \frac{4 + 2u_n - 4u_n}{4} = \\ &= \frac{4 - 2u_n}{4} \end{aligned}$$

Pela alínea anterior,  $u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Logo:

$$2u_n < 4 \Leftrightarrow -2u_n > -4$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2u_n > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 - 2u_n}{4} > 0$$

Ou seja,  $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Logo,  $(u_n)$  é crescente.

27. Seja  $P(n): \forall n \in \mathbb{N}_0, u_n = \frac{2}{2n+1}$ .

$$P(0): u_0 = \frac{2}{2 \times 0 + 1} \Leftrightarrow 2 = \frac{2}{0+1} \Leftrightarrow 2 = \frac{2}{1} \Leftrightarrow 2 = 2$$

Logo,  $P(0)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $u_n = \frac{2}{2n+1}$

**Tese:**  $u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1}$

**Demonstração:**

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} = \frac{2}{2n+3} = \frac{2}{2n+2+1} = \frac{2}{2(n+1)+1}$$

Logo,  $\forall n \in \mathbb{N}_0, u_n = \frac{2}{2n+1}$ .

## Unidade 3 - Progressões aritméticas e geométricas

Páginas 26 a 42

28.

a)  $a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 2 - (3n - 2) = 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que 3 é uma constante, fica provado que  $(a_n)$  é uma progressão aritmética de razão 3.

b)  $b_{n+1} - b_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{(n+2)n - (n+1)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que  $-\frac{1}{n(n+1)}$  não é uma constante, então  $(b_n)$  não é uma progressão aritmética.

c)  $c_{n+1} - c_n = \frac{-2(n+1)^2 + (n+1)}{n+1} - \frac{-2n^2 + n}{n} = \frac{(n+1)[-2(n+1)+1]}{n+1} - \frac{n(-2n+1)}{n} = -2n - 2 + 1 - (-2n + 1) = -2n - 1 + 2n - 1 = -2, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que -2 é uma constante, fica provado que  $(c_n)$  é uma progressão aritmética de razão -2.

d)  $d_{n+1} - d_n = d_n - \frac{1}{2} - d_n = -\frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que  $-\frac{1}{2}$  é uma constante, fica provado que  $(d_n)$  é uma progressão aritmética de razão  $-\frac{1}{2}$ .

e)  $e_{n+1} - e_n = 3^{n+1} - 3^n = 3^n(3 - 1) = 2 \times 3^n, \forall n \in \mathbb{N}$   
Uma vez que  $2 \times 3^n$  não é uma constante, então  $(e_n)$  não é uma progressão aritmética.

f)  $f_{n+1} - f_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que  $2n + 1$  não é uma constante, então  $f(n)$  não é uma progressão aritmética.

29.

a)  $u_{345} - u_{344} = 5$

b)  $u_{2017} - u_{2015} = 2 \times 5 = 10$

c)  $u_{n+3} - u_n = 3 \times 5 = 15$

30.

a)  $a_n = 1 - 4n$

Uma vez que os pontos que representam esta progressão aritmética estão sobre uma reta de declive -4, então  $r = -4$ . Como  $r < 0$ , então a progressão aritmética  $(a_n)$  é decrescente.

b)  $b_n = -2 + 3n$

Uma vez que os pontos que representam esta progressão aritmética estão sobre uma reta de declive 3, então  $r = 3$ . Como  $r > 0$ , então a progressão aritmética  $(b_n)$  é crescente.

c)  $c_n = -\frac{1-3n}{2} - n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}n - n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n$

Uma vez que os pontos que representam esta progressão aritmética estão sobre uma reta de declive  $\frac{1}{2}$ , então  $r = \frac{1}{2}$ . Como  $\frac{1}{2} > 0$ , então a progressão aritmética  $(c_n)$  é crescente.

c)  $d_n = \frac{n-3n^2}{n} = \frac{n(1-3n)}{n} = 1 - 3n$

Uma vez que os pontos que representam esta progressão aritmética estão sobre uma reta de declive -3, então  $r = -3$ . Como  $r < 0$ , então a progressão aritmética  $(d_n)$  é decrescente.

31.

a)  $u_n = u_1 + (n-1)r \Leftrightarrow u_n = -10 + (n-1)4 \Leftrightarrow u_n = -10 + 4n - 4 \Leftrightarrow u_n = 4n - 14$

b)  $u_n = u_6 + (n-6)r \Leftrightarrow u_n = -2 + (n-6)5 \Leftrightarrow u_n = -2 + 5n - 30 \Leftrightarrow u_n = 5n - 32$

c)  $u_{26} = u_{10} + (26-10)r \Leftrightarrow 21 = 13 + 16r \Leftrightarrow 8 = 16r$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$u_n = u_{10} + (n-10)r \Leftrightarrow u_n = 13 + (n-10)\frac{1}{2}$$



$$\Leftrightarrow u_n = 13 + \frac{1}{2}n - 5$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}n + 8$$

$$\begin{aligned} \text{d) } u_n &= u_1 + (n-1)r \Leftrightarrow u_n = -\sqrt{2} + (n-1)\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow u_n = -\sqrt{2} + \sqrt{2}n - \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow u_n = \sqrt{2}n - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

**32.**

$$\text{a) } v_{2017} = v_1 + (2107-1)r = 11 + 2016 \times (-3) = -6037$$

$$\text{b) } v_{2017} = v_4 + (2017-4)r = -\sqrt{5} + 2013 = 2013 - \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } v_{130} &= v_{13} + (130-13)r \Leftrightarrow -259 = -25 + 117r \\ &\Leftrightarrow 117r = -234 \Leftrightarrow r = -2 \\ v_{2017} &= v_{13} + (2017-13)r = -25 + 2004 \times (-2) = \\ &= -4033 \end{aligned}$$

$$\text{d) } v_{2017} = v_1 + (2017-1)r = 0 + 2016 \times (-3) = -6048$$

**33.** O primeiro múltiplo natural de 4, que está entre 406 e 3002, é o 408, e o último múltiplo natural de 4, neste intervalo, é o 3000.

$$u_n = u_k + (n-k)r$$

$$\text{Logo, } 3000 = 408 + (n-k)4$$

$$\Leftrightarrow n-k = \frac{3000-408}{4} \Leftrightarrow n-k = 648$$

Assim, o número de múltiplos naturais de 4 compreendidos entre 406 e 3002 é  $n-k+1 = 649$ .

**34.** Sejam  $l-r$ ,  $l$  e  $l+r$  as medidas dos lados do triângulo e  $r$  a razão da progressão.

Uma vez que o perímetro do triângulo mede 36 cm, vem que:

$$(l-r) + l + (l+r) = 36 \Leftrightarrow 3l = 36 \Leftrightarrow l = 12$$

Por outro lado, dado que se trata de um triângulo retângulo, verifica-se que:

$$(l+r)^2 = l^2 + (l-r)^2$$

Como  $l = 12$ , temos que:

$$(12+r)^2 = 12^2 + (12-r)^2$$

$$\Leftrightarrow 144 + 24r + r^2 = 144 + 144 - 24r + r^2$$

$$\Leftrightarrow 24r = 144 - 24r$$

$$\Leftrightarrow 48r = 144$$

$$\Leftrightarrow r = 3$$

Concluimos assim que 9, 12 e 15 são as medidas dos lados do triângulo.

**35.** Seja  $P(n)$ :  $u_n = 3 + (n-1) \times 5$

$$P(1): u_1 = 3 + (1-1) \times 5 \Leftrightarrow 3 = 3 + 0 \times 5 \Leftrightarrow 3 = 3$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } u_n = 3 + (n-1) \times 5$$

$$\text{Tese: } u_{n+1} = 3 + n \times 5$$

**Demonstração:**

$$u_{n+1} = u_n + 5 = 3 + (n-1) \times 5 + 5 =$$

$$= 3 + 5n - 5 + 5 = 3 + 5n$$

Assim, fica provado que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P(n)$  é uma proposição verdadeira.

**36.**  $u_1 + u_{19} = 13$ : soma do primeiro e do último termos da progressão aritmética ( $u_n$ ).

**a)**  $u_2 + u_{18} = 13$ : soma do segundo e do penúltimo termos da progressão aritmética ( $u_n$ ).

**b)**  $u_3 + u_{17} = 13$ : soma do terceiro e do antepenúltimo termos da progressão aritmética ( $u_n$ ).

**c)**  $u_{10} = \frac{13}{2}$ : termo central da progressão aritmética ( $u_n$ ).

**37.**

$$\text{a) } S = \frac{a_1 + a_{19}}{2} \times 19 = \frac{-8 + 82}{2} \times 19 = 703$$

**Cálculos auxiliares**

$$a_1 = 5 \times 1 - 13 = -8$$

$$a_{19} = 5 \times 19 - 13 = 82$$

$$\text{b) } S = \frac{b_{11} + b_{50}}{2} \times 40 = \frac{-25 - 142}{2} \times 40 = -3340$$

**Cálculos auxiliares**

$$b_{11} = -3 \times 11 + 8 = -25$$

$$b_{50} = -3 \times 50 + 8 = -142$$

**38.**

$$\text{a) } 14 + 21 + 28 + \dots + 224$$

As parcelas desta soma estão em progressão aritmética de razão 7.

Assim, o termo geral desta progressão aritmética é:

$$u_n = u_1 + (n-1)7 \Leftrightarrow u_n = 14 + (n-1)7$$

$$\Leftrightarrow u_n = 14 + 7n - 7$$

$$\Leftrightarrow u_n = 7n + 7$$

É agora necessário saber a ordem do termo 224:

$$u_n = 224 \Leftrightarrow 7n + 7 = 224 \Leftrightarrow n = 31$$

Ou seja, a soma que se pretende determinar é constituída por 31 parcelas.

$$\text{Logo, } S = \frac{14 + 224}{2} \times 31 = 3689.$$

$$\text{b) } -22 - 11 + 11 + 22 + \dots + 253$$

As parcelas desta soma estão em progressão aritmética de razão 11.

Assim, o termo geral desta progressão aritmética é:

$$u_n = u_1 + (n-1)11 \Leftrightarrow u_n = -22 + (n-1)11$$

$$\Leftrightarrow u_n = -22 + 11n - 11$$

$$\Leftrightarrow u_n = 11n - 33$$

É agora necessário saber a ordem do termo 253:

$$u_n = 253 \Leftrightarrow 11n - 33 = 253 \Leftrightarrow n = 26$$

Ou seja, a soma que se pretende determinar é constituída por 26 parcelas.

$$\text{Logo, } S = \frac{-22 + 253}{2} \times 26 = 3003.$$

**39.** Pretende-se calcular  $63 + 66 + \dots + 243$ .

As parcelas desta soma estão em progressão aritmética de razão 3.

Assim, o termo geral desta progressão aritmética é:

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (n-1)3 \Leftrightarrow u_n = 63 + (n-1)3 \\ &\Leftrightarrow u_n = 63 + 3n - 3 \\ &\Leftrightarrow u_n = 3n + 60 \end{aligned}$$

É agora necessário saber a ordem do termo 243:

$$u_n = 243 \Leftrightarrow 3n + 60 = 243 \Leftrightarrow n = 61$$

Ou seja, a soma que se pretende determinar é constituída por 61 parcelas.

$$\text{Logo, } S = \frac{63 + 243}{2} \times 61 = 9333.$$

**40.** Seja  $P(p): \sum_{n=1}^p u_n = p \frac{u_1 + u_p}{2}$

$$P(1): u_1 = 1 \times \frac{u_1 + u_1}{2} \Leftrightarrow u_1 = u_1$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } \sum_{n=1}^p u_n = p \frac{u_1 + u_p}{2}$$

$$\text{Tese: } \sum_{n=1}^{p+1} u_n = (p+1) \frac{u_1 + u_{p+1}}{2}$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{p+1} u_n &= \sum_{n=1}^p u_n + u_{p+1} = \\ &= p \frac{u_1 + u_p}{2} + u_{p+1} = \\ &= \frac{pu_1 + pu_p + 2u_{p+1}}{2} = \\ &= \frac{p u_1 + p(u_1 + (p-1)r) + 2(u_p + r)}{2} = \\ &= \frac{pu_1 + pu_1 + p(p-1)r + 2(u_1 + (p-1)r + r)}{2} = \\ &= \frac{2p u_1 + 2u_1 + p(p-1)r + 2[(p-1)r + r]}{2} = \\ &= \frac{(2p+2)u_1 + p(p-1)r + 2pr}{2} = \\ &= \frac{(2p+2)u_1 + pr(p-1+2)}{2} = \\ &= \frac{2(p+1)u_1 + pr(p+1)}{2} = \\ &= \frac{(p+1)(2u_1 + pr)}{2} = \end{aligned}$$

$$= (p+1) \frac{u_1 + u_1 + pr}{2} =$$

$$= (p+1) \frac{u_1 + u_{p+1}}{2}$$

Assim, fica provado que, para todo o  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{n=1}^p u_n = p \frac{u_1 + u_p}{2}.$$

**41.** Como  $u_1 + u_2 = 18$ , então tem-se:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 &= 52 \Leftrightarrow 18 + u_1 + 2r + u_2 + 2r = 52 \\ &\Leftrightarrow 36 + 4r = 52 \\ &\Leftrightarrow 4r = 16 \\ &\Leftrightarrow r = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } u_1 + u_2 &= 18 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + 4 = 18 \\ &\Leftrightarrow 2u_1 = 14 \\ &\Leftrightarrow u_1 = 7 \end{aligned}$$

O termo geral desta progressão aritmética é:

$$u_n = 7 + 4(n-1) \Leftrightarrow u_n = 7 + 4n - 4 \Leftrightarrow u_n = 4n + 3$$

Então,  $u_{10} = 4 \times 10 + 3 = 43$ .

$$\text{Logo, } S = \frac{7 + 43}{2} \times 10 = 250.$$

$$\begin{aligned} \text{42. } S &= 525 \Leftrightarrow \frac{-\frac{39}{2} + u_n}{2} \times n = 525 \\ &\Leftrightarrow -\left(\frac{39}{2} + \left(-\frac{39}{2} + \frac{1}{2}(n-1)\right)\right)n = 1050 \\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{39}{2} - \frac{39}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)n = 1050 \\ &\Leftrightarrow -\frac{79}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = 1050 \\ &\Leftrightarrow n^2 - 79n - 2100 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = \frac{79 \pm \sqrt{79^2 + 4 \times 2100}}{2} \\ &\Leftrightarrow n = 100 \vee n = -21 \end{aligned}$$

Uma vez que  $n$  é um número natural, tem-se que  $n = 100$ .

**43.**

**a)** A sucessão do número de páginas lidas pela Isaura é uma progressão aritmética de razão 2 e cujo primeiro termo é 5.

O termo geral desta progressão é:

$$u_n = 5 + 2(n-1) \Leftrightarrow u_n = 5 + 2n - 2 \Leftrightarrow u_n = 2n + 3$$

O dia 7 de dezembro é o décimo segundo dia de leitura da Isaura.

Assim,  $u_{12} = 2 \times 12 + 3 = 27$ , ou seja, no dia 7 de dezembro a Isaura lê 27 páginas.

$$\begin{aligned} \text{b) } S = 480 &\Leftrightarrow \frac{5+2n+3}{2} \times n = 480 \\ &\Leftrightarrow (8+2n)n = 960 \\ &\Leftrightarrow 2n^2 + 8n - 960 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 8 \times 960}}{4} \\ &\Leftrightarrow n = 20 \vee n = -24 \end{aligned}$$

Como  $n$  é um número natural, então  $n = 20$ .

Logo, a Isaura terminará a leitura do livro no dia 15 de dezembro.

44.

$$\text{a) } u_1 = 5; u_2 = 5 \times 2 = 10; u_3 = 10 \times 2 = 20; \\ u_4 = 20 \times 2 = 40$$

$$\text{b) } u_1 = -5; u_2 = -5 \times 2 = -10; u_3 = -10 \times 2 = -20; \\ u_4 = -20 \times 2 = -40$$

$$\text{c) } u_1 = 5; u_2 = 5 \times (-2) = -10; u_3 = -10 \times (-2) = 20; \\ u_4 = 20 \times (-2) = -40$$

$$\text{d) } u_1 = \frac{1}{5}; u_2 = \frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5}; u_3 = \frac{2}{5} \times 2 = \frac{4}{5}; \\ u_4 = \frac{4}{5} \times 2 = \frac{8}{5}$$

$$\text{e) } u_1 = \frac{1}{5}; u_2 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}; u_3 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}; \\ u_4 = \frac{1}{20} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{40}$$

45.

$$\text{a) } \frac{u_{13}}{u_{12}} = 3$$

$$\text{b) } \frac{u_{2017}}{u_{2018}} = \frac{1}{\frac{u_{2018}}{u_{2017}}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } \frac{u_{100}}{u_{98}} = \frac{u_{100}}{u_{99}} \times \frac{u_{99}}{u_{98}} = 3 \times 3 = 9$$

46.

$$\text{a) } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+2}}{3^{n+1}} = 3, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que 3 é uma constante, fica provado que  $(a_n)$  é uma progressão geométrica de razão 3.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-(n+1)}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n-1+n} = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Uma vez que 2 é uma constante, fica provado que  $(b_n)$  é uma progressão geométrica de razão 2.

$$\text{c) } \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{4 \times (-2)^{n+1}}{4 \times (-2)^n} = (-2)^{n+1-n} = -2, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que -2 é uma constante, fica provado que  $(c_n)$  é uma progressão geométrica de razão -2.

$$\text{d) } \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{-\pi \times (\sqrt{2})^{n+1}}{-\pi \times (\sqrt{2})^n} = \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que  $\sqrt{2}$  é uma constante, fica provado que  $(d_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\sqrt{2}$ .

$$\text{e) } \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\frac{3^{n+2}}{5^{n+1}}}{\frac{3^{n+1}}{5^n}} = \frac{3^{n+2} \times 5^n}{5^{n+1} \times 3^{n+1}} = \frac{3}{5}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que  $\frac{3}{5}$  é uma constante, fica provado que  $(e_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{3}{5}$ .

47.

$$\text{a) } u_n = u_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 4 \times 3^{n-1}$$

$$\text{b) } \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{1} = 2 = r$$

Logo:

$$u_n = u_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 1 \times 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow u_n = 2^{n-1}$$

$$\text{c) } \frac{u_{50}}{u_{49}} = -1 = r$$

Logo:

$$u_n = u_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 3 \times (-1)^{n-1}$$

$$\text{d) } u_6 = u_1 \times r^{6-1} \Leftrightarrow \frac{32}{5} = \frac{1}{5} \times r^5 \Leftrightarrow r^5 = 32 \Leftrightarrow r = 2$$

Logo:

$$u_n = u_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{5} \times 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = \frac{2^{n-1}}{5}$$

$$\text{e) } u_7 = u_4 \times r^{7-4} \Leftrightarrow 320 = 40 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$$

Logo:

$$u_n = u_4 \times r^{n-4} \Leftrightarrow u_n = 40 \times 2^{n-4} \\ \Leftrightarrow u_n = 5 \times 2^3 \times 2^{n-4} \\ \Leftrightarrow u_n = 5 \times 2^{n-1}$$

$$\text{f) } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{4u_n}{3}}{u_n} = \frac{4}{3}$$

Logo:

$$u_n = u_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 1 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

48.

a) Se  $(u_n)$  é uma progressão geométrica crescente e o seu primeiro termo é positivo, então a sua razão tem ser maior que 1. O termo geral de uma progressão geométrica nestas condições é, por exemplo,  $u_n = 2 \times 3^{n-1}$ .

**b)** Se  $(u_n)$  é uma progressão geométrica decrescente e o seu primeiro termo é positivo, então a sua razão tem ser positiva e menor que 1. O termo geral de uma progressão geométrica nestas condi-

ções é, por exemplo,  $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ .

**c)** Se  $(u_n)$  é uma progressão geométrica não monótona e o seu primeiro termo é positivo, então a sua razão tem ser negativa. O termo geral de uma progressão geométrica nestas condições é, por exemplo,  $u_n = 2 \times (-3)^{n-1}$ .

**d)** Se  $(u_n)$  é uma progressão geométrica crescente e a sua razão é maior que 1, então o seu primeiro termo é positivo. O termo geral de uma progressão geométrica nestas condições é, por exemplo,  $u_n = 5 \times 2^{n-1}$ .

**e)** Se  $(u_n)$  é uma progressão geométrica decrescente e a sua razão é maior que 1, então o seu primeiro termo é negativo. O termo geral de uma progressão geométrica nestas condições é, por exemplo,  $u_n = -5 \times 2^{n-1}$ .

**49.**

$$\text{a)} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{2 \times 3^n}{2 \times 3^{n+1}} = \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez  $\frac{1}{3}$  que é uma constante, fica provado que  $(v_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{3}$ .

**b)**  $v_1 = \frac{2}{3} > 0$  e  $0 < r = \frac{1}{3} < 2$ , logo  $(v_n)$  é uma progressão geométrica decrescente.

**50.**

$$\text{a)} S = 1 \times \frac{1-3^{15}}{1-3} = 7\,174\,453$$

$$\text{b)} S = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{15}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{2}$$

$$\text{c)} S = 3 \times \frac{1 - (-1)^{15}}{1 - (-1)} = 3$$

**d)**  $S = 4 \times 15 = 60$ , uma vez que se trata de uma sucessão constante.

$$\text{51. } v_1 = \frac{6^2}{2} = 18$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{6^{n+2}}{2^{n+1}}}{\frac{6^{n+1}}{2^n}} = \frac{6^{n+2} \times 2^n}{6^{n+1} \times 2^{n+1}} = \frac{6}{2} = 3 = r$$

$$\text{Logo, } S = 18 \times \frac{1-3^n}{1-3} = -9(1-3^n).$$

$$\text{52. } u_1 = 1$$

$$r = 2$$

$$S = 1 \times \frac{1-2^{30}}{1-2} = 1\,073\,741\,823$$

Se os seus pais aceitassem as condições, a Joana receberia 1 073 741 823 cêntimos, ou seja, 10 737 418,23 euros.

$$\text{53. Seja } P(p): \sum_{n=1}^p u_n = a \frac{1-r^p}{1-r}$$

$$P(1): u_1 = a \frac{1-r}{1-r} \Leftrightarrow a = a$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } \sum_{n=1}^p u_n = a \frac{1-r^p}{1-r}$$

$$\text{Tese: } \sum_{n=1}^{p+1} u_n = a \frac{1-r^{p+1}}{1-r}$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{p+1} u_n &= \sum_{n=1}^p u_n + u_{p+1} = \\ &= a \frac{1-r^p}{1-r} + u_1 r^p = \\ &= a \frac{1-r^p}{1-r} + a r^p = \\ &= a \left( \frac{1-r^p}{1-r} + r^p \right) = \\ &= a \frac{1-r^p + r^p - r \times r^p}{1-r} = \\ &= a \frac{1-r^{p+1}}{1-r} \end{aligned}$$

Assim, fica provado que, para todo o  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{n=1}^p u_n = a \frac{1-r^p}{1-r}.$$

$$\text{54. } u_1 = 10\,000$$

$$r = 1 + 0,31 = 1,031$$

$$u_n = 10\,000 \times 1,031^{n-1}$$

$$u_{10} = 10\,000 \times 1,031^9 \approx 13\,162$$

Ao décimo dia da experiência haverá, aproximadamente, 13 162 bactérias.

$$\text{55. } u_1 = 4500$$

$$r = 1 - 0,15 = 0,85$$

$$u_n = 4500 \times 0,85^{n-1}$$

$$u_4 = 4500 \times 0,85^3 \approx 2349$$

No quarto ano do estudo, a aldeia terá, aproximadamente, 2764 habitantes.

## Aprende Fazendo

Páginas 44 a 57

1.  $u_{2018} - u_{2017} = 1 - 2 = -1$

A opção correta é a (A).

2.  $v_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

Uma vez que  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\frac{1}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , pelo que

$$1 + \frac{1}{n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, tem-se que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$ .

A opção correta é a (B).

3.  $w_1 = 4$

$$w_2 = 2w_1 + 1 = 2 \times 4 + 1 = 9$$

$$w_3 = 2w_2 + 1 = 2 \times 9 + 1 = 19$$

$$w_4 = 2w_3 + 1 = 2 \times 19 + 1 = 39$$

A opção correta é a (C).

4.  $t_1 = 1 = 1^2$

$$t_2 = 4 = 2^2$$

$$t_3 = 9 = 3^2$$

$$t_4 = 16 = 4^2$$

E assim sucessivamente.

Logo,  $t_n = n^2$ .

A opção correta é a (B).

5. Seja  $(u_n)$  a progressão aritmética a que se refere o enunciado. Então:

$$u_{10} = u_1 + (10 - 1)r \Leftrightarrow 81 = u_1 + 9 \times 5$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 81 - 45$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 36$$

A opção correta é a (B).

6. Se  $u_n = \frac{2n + 6n^2}{n}$ , então:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1) + 6(n+1)^2}{n+1} - \frac{2n + 6n^2}{n} =$$

$$= 2 + 6(n+1) - 2 - 6n =$$

$$= 6n + 6 - 6n =$$

$$= 6, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que 6 é uma constante, fica provado que  $(u_n)$  é uma progressão aritmética.

A opção correta é a (A).

7.  $u_1 = -2$

$$u_2 = 4$$

$$u_3 = -6$$

Logo,  $(u_n)$  não é uma sucessão monótona, uma vez que  $u_2 - u_1 > 0$  e  $u_3 - u_2 < 0$ . Também se pode já

concluir que  $(u_n)$  não é limitada, uma vez que não tem majorante nem minorante.

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= 2 + \frac{1}{n+1} - \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \\ &= \frac{n - n - 1}{n(n+1)} = \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo,  $(w_n)$  é decrescente.

Como  $(w_n)$  é decrescente,  $w_1 = 3$  é um seu majorante, bem como qualquer outro número real superior a 3. Em particular, 4 é um majorante da sucessão  $(w_n)$ .

A opção correta é a (C).

8.  $(a_n)$  é a restrição ao conjunto  $\mathbb{N}$  da função real de variável real  $f$  definida por  $f(x) = x^2 + 6x + 5$ , que é uma função quadrática e cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima e de vértice no ponto de coordenadas  $(-3, f(-3))$ , tratando-se de uma função decrescente em  $]-\infty, -3]$  e crescente em  $[-3, +\infty[$ . Assim,  $(a_n)$  é crescente.

### Cálculo auxiliar

$$\text{Abcissa do vértice: } x = \frac{-6}{2} = -3$$

$(b_n)$  é a restrição ao conjunto  $\mathbb{N}$  da função real de variável real  $g$  definida por  $g(x) = x^2 - 6x + 5$ , que é uma função quadrática e cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima e de vértice no ponto de coordenadas  $(3, f(3))$ , tratando-se de uma função decrescente em  $]-\infty, 3]$  e crescente em  $[3, +\infty[$ . Assim,  $(b_n)$  não é monótona.

### Cálculo auxiliar

$$\text{Abcissa do vértice: } x = \frac{6}{2} = 3$$

A opção correta é a (D).

9. Observe-se que  $v_1 = 1, v_2 = -1, v_3 = 1, v_4 = -1$  e assim sucessivamente, pelo que uma outra forma de definir esta sucessão poderia ser:

$$v_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Assim,  $v_{2014} = -1$ .

A opção correta é a (A).

10.  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{-2(n+1)}}{2^{-2n}} = 2^{-2n-2+2n} = 2^{-2} = \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que  $\frac{1}{4}$  é uma constante, então  $(u_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{4}$ .

A opção correta é a (D).

$$11. \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\sqrt{2^{n+1}-4}}{2\sqrt{2^n-4}} = \sqrt{\frac{2^{n+1}-4}{2^n-4}} = \sqrt{2^{n-3-n+4}} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

A opção correta é a (B).

$$12. v_1 = 4 \times 8 = 32$$

$$v_2 = 4 \times 4 = 16$$

$$v_3 = 4 \times 2 = 8$$

E assim sucessivamente.

Logo,  $(v_n)$  é uma progressão geométrica em que o primeiro termo é 32 e a razão é  $\frac{1}{2}$ .

$$\text{Assim, } v_n = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^5}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-6}}.$$

A opção correta é a (C).

13.  $1 + \pi^1 + \pi^2 + \dots + \pi^{2016} + \pi^{2017}$  é a soma dos primeiros 2018 termos de uma progressão geométrica em que o primeiro termo é 1 e a razão é  $\pi$ .

Então:

$$1 + \pi^1 + \pi^2 + \dots + \pi^{2016} + \pi^{2017} = 1 \times \frac{1 - \pi^{2018}}{1 - \pi} = \frac{1 - \pi^{2018}}{1 - \pi}$$

A opção correta é a (D).

$$14. u_1 + u_2 = 12 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + r = 12$$

$$\Leftrightarrow r + r + r = 12$$

$$\Leftrightarrow 3r = 12$$

$$\Leftrightarrow r = 4$$

A opção correta é a (B).

$$15. \frac{k+1}{k} = \frac{k}{k+2} \Leftrightarrow (k+1)(k+2) = k^2$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 3k + 2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow 3k + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}$$

A opção correta é a (B).

$$16. u_n = 1300 \times 1,016^{n-1}$$

2012 corresponde a  $n = 1$ , logo 2030 corresponde a  $n = 19$ .

Assim, em 2030 a população será de  $1300 \times 1,016^{18}$  milhares de habitantes.

A opção correta é a (A).

17.  $13 + 15 + 17 + \dots + 2017$  é a soma de alguns termos de uma progressão aritmética de razão 2 e primeiro termo 13.

Então, o termo geral desta progressão é:

$$u_n = 13 + (n-1) \times 2 \Leftrightarrow u_n = 2n + 11$$

Assim:

$$2017 = 2n + 11 \Leftrightarrow n = 1003$$

Assim:

$$13 + 15 + 17 + \dots + 2017 = 1003 \frac{13 + 2017}{2} = 1\,018\,045$$

A opção correta é a (D).

$$18. \frac{u_{1001}}{u_{1002}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{u_{1002}}{u_{1001}} = 2 \Leftrightarrow r = 2$$

$$S_7 = 381 \Leftrightarrow u_1 \frac{1-2^7}{1-2} = 381$$

$$\Leftrightarrow u_1 \times 127 = 381 \Leftrightarrow u_1 = 3$$

Assim,  $u_n = 3 \times 2^{n-1}$ .

Logo,  $u_{10} = 3 \times 2^9$ .

A opção correta é a (C).

19. Como  $(u_n)$  é uma progressão aritmética de razão 3, então  $u_{n+1} - u_n = 3$ .

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{-3u_{n+1}}}{2^{-3u_n}} = 2^{-3(u_{n+1} - u_n)} = 2^{-3 \times 3} = 2^{-9}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que  $2^{-9}$  é uma constante, então  $(v_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $2^{-9}$ .

A opção correta é a (A).

20. Seja  $h$  a altura do primeiro triângulo.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$6^2 = 3^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = 27$$

$$\text{Logo, } h = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Assim, a área do primeiro triângulo é:

$$a_1 = \frac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

Uma vez que os triângulos são semelhantes, e que os lados de cada triângulo têm metade do comprimento dos lados do triângulo anterior, a razão de semelhança entre os triângulos é  $\frac{1}{2}$  e a razão entre as suas áreas é  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ .

$$\text{Então, a sucessão cujo termo geral representa a área, em cm}^2, \text{ de cada um dos triângulos é uma progressão geométrica de razão } \frac{1}{4} \text{ e primeiro termo } 9\sqrt{3}.$$

Logo:

$$a_n = 9\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{9\sqrt{3}}{(2^2)^{n-1}} = \frac{9\sqrt{3}}{2^{2n-2}}$$

A opção correta é a (A).

21.  $p^6 - p^5q + p^4q^2 - p^3q^3 + p^2q^4 - pq^5 + q^6$  é a soma dos 7 primeiros termos de uma progressão geométrica de razão  $-\frac{q}{p}$  e primeiro termo  $p^6$ .

Assim:

$$p^6 - p^5q + p^4q^2 - p^3q^3 + p^2q^4 - pq^5 + q^6 =$$

$$= p^6 \frac{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^7}{1 + \frac{q}{p}} = p^6 \frac{1 + \frac{q^7}{p^7}}{1 + \frac{q}{p}} =$$

$$= p^6 \frac{\frac{p^7 + q^7}{p^7}}{\frac{p + q}{p}} = p^6 \frac{(p^7 + q^7)p}{(p + q)p^7} =$$

$$= p^6 \frac{p^7 + q^7}{(p + q)p^6} = \frac{p^7 + q^7}{p + q}$$

A opção correta é a (B).

22.

a)  $u_1 = 2 = 2 \times 1$

$$u_2 = 4 = 2 \times 2$$

$$u_3 = 6 = 2 \times 3$$

E assim sucessivamente.

Logo,  $u_n = 2n$ .

b)  $u_1 = 1 = 1^2$

$$u_2 = 4 = 2^2$$

$$u_3 = 9 = 3^2$$

E assim sucessivamente.

Logo,  $u_n = n^2$ .

c)  $u_1 = 3 = 1^2 + 2$

$$u_2 = 6 = 2^2 + 2$$

$$u_3 = 11 = 3^2 + 2$$

E assim sucessivamente.

Logo,  $u_n = n^2 + 2$ .

d)  $u_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$

$$u_2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1}$$

$$u_3 = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1}$$

E assim sucessivamente.

Logo,  $u_n = \frac{n}{n+1}$ .

e)  $u_1 = 4 = 5 - 1$

$$u_2 = 3 = 5 - 2$$

$$u_3 = 2 = 5 - 3$$

E assim sucessivamente.

Logo,  $u_n = 5 - n$ .

23.  $u_n = \frac{4n}{n+2}$

a)  $u_6 = \frac{4 \times 6}{6+2} = \frac{24}{8} = 3$

b)  $u_n = 6 \Leftrightarrow \frac{4n}{n+2} = 6 \Leftrightarrow 4n = 6n + 12$

$$\Leftrightarrow -2n = 12$$

$$\Leftrightarrow n = -6$$

Como  $-6 \notin \mathbb{N}$ , então 6 não é um termo da sucessão  $(u_n)$ .

c)  $u_{10} - u_4 = \frac{4 \times 10}{10+2} - \frac{4 \times 4}{4+2} = \frac{10}{3} - \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$

d)  $u_{n+1} = \frac{4(n+1)}{(n+1)+2} + 1 = \frac{4n+4}{n+3}$

$$u_n + 1 = \frac{4n}{n+2} + 1 = \frac{4n+n+2}{n+2} = \frac{5n+2}{n+2}$$

e)  $u_n > \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{4n}{n+2} > \frac{5}{2} \Leftrightarrow 8n > 5n + 10$

$$\Leftrightarrow 3n > 10$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{10}{3}$$

Logo, a partir do termo de ordem 4, todos os termos da sucessão são superiores a  $\frac{5}{2}$ .

24. Se  $n$  ímpar:

$$u_n = 36 \Leftrightarrow n + 2 = 36 \Leftrightarrow n = 34, \text{ que não é um número ímpar.}$$

Assim, se 36 for termo da sucessão, então  $(u_n)$  não é um termo de ordem ímpar.

Se  $n$  par:

$$u_n = 36 \Leftrightarrow n^2 = 36 \Leftrightarrow n = 6 \vee n = -6$$

Logo, 36 é o 6.º termo da sucessão  $(u_n)$ .

Se  $n < 5$ :

$$v_n = 36 \Leftrightarrow n^2 = 36 \Leftrightarrow n = 6 \vee n = -6$$

Assim, se 36 for termo da sucessão, então  $(v_n)$  não é um termo de ordem inferior a 5.

Se  $n \geq 5$ :

$$v_n = 36 \Leftrightarrow 7n = 36 \Leftrightarrow n = \frac{36}{7}, \text{ que não é um número natural.}$$

Logo, 36 não é um termo da sucessão  $(v_n)$ .

25.

a)  $a_1 = -1$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = -1$$

Tem-se que  $a_2 - a_1 > 0$  e  $a_3 - a_2 < 0$ , logo a sucessão  $(a_n)$  não é monótona.

b)  $b_{n+1} - b_n = 4(n+1) - 5 - (4n - 5) =$

$$= 4n + 4 - 5 - 4n + 5 =$$

$$= 4 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo,  $(b_n)$  é uma sucessão crescente.

c)  $c_{n+1} - c_n = \frac{3n+5}{n+1} - \frac{3n+2}{n} =$

$$= \frac{3n^2 + 5n - (3n^2 + 5n + 2)}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{-2}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo,  $(c_n)$  é uma sucessão decrescente.

**26.**

**a)**  $a_1 = 1^3 + 2 = 3$

$$a_2 = 2^3 + 2 = 10$$

$$a_3 = 3^3 + 2 = 29$$

E assim sucessivamente.

Então, o conjunto dos minorantes de  $(a_n)$  é  $]-\infty, 3]$

e  $(a_n)$  não tem majorantes.

**b)**  $b_1 = -5 \times 1 - 1 = -6$

$$b_2 = -5 \times 2 - 1 = -11$$

$$b_3 = -5 \times 3 - 1 = -16$$

E assim sucessivamente.

Então, o conjunto dos majorantes de  $(b_n)$  é  $[-6, +\infty[$

e  $(b_n)$  não tem minorantes.

**c)**  $c_1 = -\frac{1}{2}$

$$c_2 = \frac{1}{2}$$

$$c_3 = -\frac{1}{2}$$

$$c_4 = \frac{1}{2}$$

E assim sucessivamente.

Então, o conjunto dos minorantes de  $(c_n)$  é  $]-\infty, -\frac{1}{2}]$

e o conjunto dos majorantes de  $(c_n)$  é  $[\frac{1}{2}, +\infty[$ .

**d)**  $d_1 = -1$

$$d_2 = 2$$

$$d_3 = -3$$

$$d_4 = 4$$

E assim sucessivamente.

Então,  $(d_n)$  não tem majorantes nem minorantes.

**27.**

**a)**  $u_n = 2 + \frac{1}{n}$

Sabe-se que  $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Logo,  $2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Assim, a sucessão  $(u_n)$  é limitada.

**b)**  $v_n = \frac{3n-1}{n} = 3 - \frac{1}{n}$

Sabe-se que  $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Logo,  $0 > -\frac{1}{n} \geq -1 \Leftrightarrow 3 > 3 - \frac{1}{n} \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Assim, a sucessão  $(v_n)$  é limitada.

**c)**  $w_n = (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

Logo,  $-1 \leq w_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ . Assim, a sucessão  $(w_n)$  é limitada.

**28.**

**a)**  $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}(n+1) + 1 - \left(\frac{2}{5}n + 1\right) =$   
 $= \frac{2}{5}n + \frac{2}{5} + 1 - \frac{2}{5}n - 1 =$   
 $= \frac{2}{5}, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que  $\frac{2}{5}$  é uma constante, então  $(u_n)$  é uma progressão aritmética de razão  $\frac{2}{5}$ .

**b)**  $v_{n+1} - v_n = \frac{2(n+1)+1}{n+1} - \frac{2n+1}{n} =$   
 $= \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2n+1}{n} =$   
 $= \frac{2n^2+3n-2n^2-2n-n-1}{n(n+1)} =$   
 $= \frac{-1}{n(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que  $\frac{-1}{n(n+1)}$  não é uma constante, então  $(v_n)$  não é uma progressão aritmética.

**c)**  $w_{n+1} - w_n = (n+1)^2 + (n+1) - (n^2 + n) =$   
 $= n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n =$   
 $= 2n + 2, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que  $2n + 2$  não é uma constante, então  $(w_n)$  não é uma progressão aritmética.

**d)**  $x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)^2 - 2(n+1)}{n+1} - \frac{n^2 - 2n}{n} =$   
 $= \frac{n^2 + 2n + 1 - 2n - 2}{n+1} - \frac{n(n-2)}{n} =$   
 $= \frac{n^2 - 1}{n+1} - (n-2) =$   
 $= \frac{(n+1)(n-1)}{n+1} - n + 2 =$   
 $= n - 1 - n + 2 =$   
 $= 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que 1 é uma constante, então  $(x_n)$  é uma progressão aritmética de razão 1.

**e)**  $y_{n+1} - y_n = y_n - \pi - y_n = -\pi, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que  $-\pi$  é uma constante, então  $(y_n)$  é uma progressão aritmética de razão  $-\pi$ .



29.

$$a) \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\pi^{n+1}}{2\pi^n} = \pi^{n+1-n} = \pi, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que  $\pi$  é uma constante, então  $(u_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\pi$ .

$$b) \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(\sqrt{3})^n}{(\sqrt{3})^{n-1}} = (\sqrt{3})^{n-n+1} = \sqrt{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que  $\sqrt{3}$  é uma constante, então  $(v_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\sqrt{3}$ .

$$\begin{aligned} c) \frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{(n+1)^2 + n + 1}{n^2 + n} = \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1}{n^2 + n} = \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + n} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \\ &= \frac{n+2}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Uma vez que  $\frac{n+2}{n}$  não é uma constante, então  $(w_n)$  não é uma progressão geométrica.

$$d) \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{4^{n+1}}{5}}{\frac{4^n}{5}} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que 4 é uma constante, então  $(x_n)$  é uma progressão geométrica de razão 4.

$$e) \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{4}{5^{n+1}}}{\frac{4}{5^n}} = \frac{5^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que  $\frac{1}{5}$  é uma constante, então  $(y_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{5}$ .

$$30. u_n = 3n + 9$$

$$a) u_n = 100 \Leftrightarrow 3n + 9 = 100 \Leftrightarrow 3n = 91 \Leftrightarrow n = \frac{91}{3},$$

que não é um número natural.

Logo, 100 não é um termo da sucessão  $(u_n)$ .

$$\begin{aligned} b) u_p &> 400 \Leftrightarrow 3p + 9 > 400 \\ &\Leftrightarrow 3p > 391 \\ &\Leftrightarrow p > \frac{391}{3} \end{aligned}$$

Logo, a partir do termo de ordem 131 todos os termos da sucessão são superiores a 400.

$$\begin{aligned} c) u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) + 9 - (3n + 9) = \\ &= 3n + 3 + 9 - 3n - 9 = \\ &= 3 > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo,  $(u_n)$  é uma sucessão crescente.

Uma vez que 3 é uma constante, então  $(u_n)$  é uma progressão aritmética de razão 3.

$$d) S_n = 957 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = 957$$

$$\Leftrightarrow (12 + 3n + 9)n = 1914$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 + 21n - 1914 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 + 4 \times 3 \times 1914}}{6}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-21 \pm 153}{6}$$

$$\Leftrightarrow n = 22 \vee n = -87$$

Como  $n$  tem de ser um número natural, então  $n = 22$ .

Logo, o número de termos consecutivos a adicionar ao primeiro termo de forma a obter a soma 957 é 21.

$$31. u_n = \frac{2n-1}{n}$$

$$a) u_n = 20 \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n} = 20$$

$$\Leftrightarrow 2n - 1 = 20n$$

$$\Leftrightarrow -18n = 1$$

$$\Leftrightarrow n = -\frac{1}{18} (\notin \mathbb{N})$$

Logo, 20 não é um termo da sucessão  $(u_n)$ .

$$\begin{aligned} b) u_{n+1} - u_n &= \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} = \\ &= \frac{2n^2 + n - 2n^2 - 2n + n + 1}{n(n+1)} = \\ &= \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo,  $(u_n)$  é uma sucessão crescente.

c) Uma vez que  $\frac{1}{n(n+1)}$  não é uma constante, então  $(u_n)$  não é uma progressão aritmética.

$$d) u_n = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Sabe-se que  $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$\text{Logo, } 0 > -\frac{1}{n} \geq -1 \Leftrightarrow 2 > 2 - \frac{1}{n} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim, a sucessão  $(u_n)$  é limitada, sendo, por exemplo, 1 um minorante e 2 um majorante do conjunto dos termos da sucessão.

32.

a) O número de bolotas que o esquilo apanha em cada dia é dado por uma progressão aritmética de razão 3 e primeiro termo 7.

Assim, o número de bolotas que o esquilo apanha no  $n$ -ésimo dia do mês é dado pela expressão:

$$\begin{aligned} u_n &= 7 + (n-1) \times 3 = \\ &= 7 + 3n - 3 = \\ &= 3n + 4 \end{aligned}$$

b)  $u_{25} = 3 \times 25 + 4 = 79$

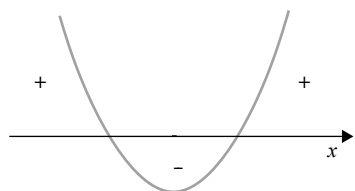
No 25.º dia, o esquilo apanhou 79 bolotas.

c)  $S_n > 1000 \Leftrightarrow \frac{7+3n+4}{2} \times n > 1000$   
 $\Leftrightarrow 3n^2 + 11n - 2000 > 0$

**Cálculo auxiliar**

$$3n^2 + 11n - 2000 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 24\,000}}{6}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-11 \pm \sqrt{24\,121}}{6}$$



Logo,  $n \approx -27,7 \vee n \approx 24,1$ .

Logo, ao fim de 25 dias, o número de bolotas ultrapassou pela primeira vez as 1000 bolotas.

**33.**

a)  $u_{36} = 20 + 35 \times 10 = 370$

A 36.ª prestação foi de 370 euros.

b)  $S_{36} = \frac{20+370}{2} \times 36 = 7020$

A Teresa pagou 7020 euros pelo carro.

**34.**  $u_n = 10 + (n-1) \times 2 = 2n + 8$

$u_{15} = 2 \times 15 + 8 = 38$

$S_{15} = \frac{10+38}{2} \times 15 = 360$

O estudante fez 360 exercícios diferentes.

**35.**

a)  $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

b)  $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

c)  $\begin{cases} u_1 = \frac{a}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

d)  $\begin{cases} u_1 = a^3 \\ u_{n+1} = \frac{3}{a} u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

**36.**

a)  $a_3 = 6$

$a_4 = 12$

$a_5 = 10$

Tem-se que  $a_4 - a_3 > 0$  e  $a_5 - a_4 < 0$ , logo a sucessão  $(a_n)$  não é monótona.

b)  $(b_n)$  é a restrição ao conjunto  $\mathbb{N}$  da função real de variável real  $f$  definida por  $f(x) = (4-x)^2$ , que é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima e de vértice no ponto de coordenadas  $(4, 0)$ , tratando-se de uma função decrescente em  $]-\infty, 4]$  e crescente em  $[4, +\infty[$ . Assim,  $(b_n)$  não é monótona.

c)  $c_{n+1} - c_n = 3 \times 2^n - 3 \times 2^{n-1} =$

$= 3 \times 2^n \left(1 - \frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{3}{2} \times 2^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo,  $(c_n)$  é uma sucessão crescente.

d)  $d_{n+1} - d_n =$

$= \frac{n+2}{2n+3} - \frac{n+1}{2n+1} =$

$= \frac{2n^2 + n + 4n + 2 - 2n^2 - 3n - 2n - 3}{(2n+3)(2n+1)} =$

$= \frac{-1}{(2n+3)(2n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo,  $(d_n)$  é uma sucessão decrescente.

e)  $e_9 = 9$

$e_{10} = 10$

$e_{11} = 6$

Tem-se que  $e_{10} - e_9 > 0$  e  $e_{11} - e_{10} < 0$ , logo a sucessão  $(e_n)$  não é monótona.

**37.**

a)  $u_n = \frac{n+1}{n+3} = \frac{n+3-2}{n+3} =$   
 $= 1 - \frac{2}{n+3}$

Sabe-se que  $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ . Então:

$0 < \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 > -\frac{2}{n+3} \geq -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 1 > 1 - \frac{2}{n+3} \geq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

Assim, a sucessão  $(u_n)$  é limitada.

b) Tem-se que  $-1 \leq \cos(n) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Logo,  $3 \leq 4 + \cos(n) \leq 5, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Assim, a sucessão  $(v_n)$  é limitada.

c)  $w_n = \pi^{-n} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^n$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{\pi}$  e primeiro termo  $\frac{1}{\pi}$ . Como  $0 < \frac{1}{\pi} < 1$ ,  $(w_n)$  é decrescente. Assim, um majorante dos termos da sucessão é  $w_1 = \frac{1}{\pi}$ .

Além disso, tem-se que  $\left(\frac{1}{\pi}\right)^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Logo,  $0 < \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \leq \frac{1}{\pi}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Assim, a sucessão  $(w_n)$  é limitada.

**38.**

$$\begin{aligned} \text{a) } u_{n+1} - u_n &= \frac{4n+4}{3n+5} - \frac{4n}{3n+2} = \\ &= \frac{12n^2 + 8n + 12n + 8 - 12n^2 - 20n}{(3n+5)(3n+2)} = \\ &= \frac{8}{(3n+5)(3n+2)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo,  $(u_n)$  é crescente.

Como  $(u_n)$  é crescente, um minorante do conjunto dos termos de  $(u_n)$  é  $u_1 = \frac{4}{5}$ .

$$u_1 = \frac{4}{5}$$

$$u_n = \frac{4n}{3n+2} = \frac{4}{3} - \frac{8}{3(3n+2)} = \frac{4}{3} - \frac{8}{9n+6}$$

**Cálculo auxiliar**

$$\begin{array}{r|l} 4n & 3n+2 \\ -4n - \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ \hline & -\frac{8}{3} \end{array}$$

Como  $\frac{8}{9n+6} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , então:

$$-\frac{8}{9n+6} < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} - \frac{8}{9n+6} < \frac{4}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo,  $\frac{4}{5} \leq u_n < \frac{4}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$ , ou seja, a sucessão  $(u_n)$  é limitada.

$$\begin{aligned} \text{b) } v_{n+1} - v_n &= 1 - \frac{1}{2}(n+1) - \left(1 - \frac{1}{2}n\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}n = \\ &= -\frac{1}{2} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo,  $(v_n)$  é decrescente.

A sucessão  $(v_n)$  não tem minorantes, logo não é uma sucessão limitada.

$$\text{c) } w_1 = -1$$

$$w_2 = 2$$

$$w_3 = -3$$

$$w_4 = 4$$

E assim sucessivamente.

Tem-se que  $w_2 - w_1 > 0$  e  $w_3 - w_2 < 0$ , logo a sucessão  $(w_n)$  não é monótona.

A sucessão  $(w_n)$  não tem minorantes nem majorantes, logo não é uma sucessão limitada.

$$\text{d) } x_1 = 3 - 1 = 2$$

$$x_2 = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$x_3 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

Tem-se que  $x_2 - x_1 > 0$  e  $x_3 - x_2 < 0$ , logo a sucessão  $(x_n)$  não é monótona.

$$x_n = 3 + (-1)^n \times \frac{1}{n} = \begin{cases} 3 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 3 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Sabe-se que  $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ . Então,  $3 < 3 + \frac{1}{n} < 4$ , se  $n$  é par, e  $0 > -\frac{1}{n} \geq -1 \Leftrightarrow 3 > 3 - \frac{1}{n} \geq 2$ , se  $n$  é ímpar.

Assim,  $2 \leq x_n < 4, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Logo, a sucessão  $(x_n)$  é limitada.

**39.**

$$\begin{aligned} \text{a) } u_{2014} - u_{2015} &= \\ &= 1 - 2 \sin\left(\frac{2014\pi}{3}\right) - 1 + 2 \sin\left(\frac{2015\pi}{3}\right) = \\ &= 2 \sin\left(671\pi + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(672\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= 2 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \\ &= -2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{b) } u_n = 1 \Leftrightarrow 1 - 2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n = 3k, k \in \mathbb{Z}$$

Todos os termos de ordem  $n = 3k, k \in \mathbb{Z}$ , são termos iguais a 1.

c) Por exemplo:

$$u_3 - u_2 = 1 - 2 \sin \pi - \left( 1 - 2 \sin \left( \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \sqrt{3} > 0 \text{ e}$$

$$u_6 - u_5 = 1 - 2 \sin(2\pi) - \left( 1 - 2 \sin \left( \frac{5\pi}{3} \right) \right) = -\sqrt{3} < 0,$$

logo  $(u_n)$  é não monótona.

d) Sabe-se que  $-1 \leq \sin \left( \frac{n\pi}{3} \right) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Então:

$$2 \geq -2 \sin \left( \frac{n\pi}{3} \right) \geq -2 \Leftrightarrow 3 \geq 1 - 2 \sin \left( \frac{n\pi}{3} \right) \geq -1$$

Assim,  $-1 \leq u_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Logo,  $(u_n)$  é limitada.

40.

a)  $u_n = 4 + (n-1) \times (-3) \Leftrightarrow u_n = 4 - 3n + 3$   
 $\Leftrightarrow u_n = -3n + 7$

Uma vez que  $r = -3 < 0$ , então  $(u_n)$  é uma progressão aritmética decrescente.

b)  $u_n = -46 + (n-10) \times (-5) \Leftrightarrow u_n = -46 - 5n + 50$   
 $\Leftrightarrow u_n = -5n + 4$

Uma vez que  $r = -5 < 0$ , então  $(u_n)$  é uma progressão aritmética decrescente.

c)  $u_{60} = u_{10} + (60-10)r \Leftrightarrow 33 = 8 + 50r \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$

$$u_n = 8 + (n-10) \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = 8 + \frac{1}{2}n - 5$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}n + 3$$

Uma vez que  $r = \frac{1}{2} > 0$ , então  $(u_n)$  é uma progressão aritmética crescente.

d)  $u_{200} = u_{180} + (200-180)r \Leftrightarrow 0 = 10 + 20r$   
 $\Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$

$$u_n = 0 + (n-200) \times \left( -\frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow u_n = -\frac{1}{2}n + 100$$

Uma vez que  $r = -\frac{1}{2} < 0$ , então  $(u_n)$  é uma progressão aritmética decrescente.

e)  $u_9 = u_2 + (9-2)r \Leftrightarrow -2 = -16 + 7r \Leftrightarrow r = 2$   
 $u_n = -16 + (n-2) \times 2 \Leftrightarrow u_n = -16 + 2n - 4$   
 $\Leftrightarrow u_n = 2n - 20$

Uma vez que  $r = 2 > 0$ , então  $(u_n)$  é uma progressão aritmética crescente.

f)  $u_n = -17 + (n-1) \times 6 \Leftrightarrow u_n = -17 + 6n - 6$   
 $\Leftrightarrow u_n = 6n - 23$

Uma vez que  $r = 6 > 0$ , então  $(u_n)$  é uma progressão aritmética crescente.

41.  $u_n = 3 + (n-1) \times 4 \Leftrightarrow u_n = 3 + 4n - 4$   
 $\Leftrightarrow u_n = 4n - 1$

$$S_n = 465 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = 465$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 + 4n - 1}{2} \times n = 465$$

$$\Leftrightarrow (4n+2)n = 930$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 2n - 930 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 14\,880}}{8}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm 122}{8}$$

$$\Leftrightarrow n = 15 \vee n = -62$$

Como  $n$  é um número natural, então  $n = 15$ .

42.

a)  $u_n = -3 + (n-1) \times 6 \Leftrightarrow u_n = -3 + 6n - 6$   
 $\Leftrightarrow u_n = 6n - 9$

b)  $u_8 + u_9 + \dots + u_{43} = \frac{u_8 + u_{43}}{2} \times (43 - 8 + 1) =$   
 $= \frac{6 \times 8 - 9 + 6 \times 43 - 9}{2} \times 36 =$   
 $= 144 \times 36 =$   
 $= 5184$

c)  $S_n = 37\,629 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = 37\,629$   
 $\Leftrightarrow \frac{-3 + 6n - 9}{2} \times n = 37\,629$   
 $\Leftrightarrow (6n - 12)n = 75\,258$   
 $\Leftrightarrow 6n^2 - 12n - 75\,258 = 0$   
 $\Leftrightarrow n^2 - 2n - 12\,543 = 0$   
 $\Leftrightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 50\,172}}{2}$   
 $\Leftrightarrow n = \frac{2 \pm 224}{2}$   
 $\Leftrightarrow n = 113 \vee n = -111$

Como  $n$  é um número natural, então  $n = 113$ .

43.

a)  $u_n = 1 + (n-1) \times 0,1 \Leftrightarrow u_n = 1 + 0,1n - 0,1$   
 $\Leftrightarrow u_n = 0,1n + 0,9$

$$u_n = 100 \Leftrightarrow 0,1n + 0,9 = 100$$

$$\Leftrightarrow 0,1n = 99,1$$

$$\Leftrightarrow n = 991$$

A sequência tem 991 elementos.

b)  $S_{991} = \frac{1 + 100}{2} \times 991 = 50\,045,5$

44.

a)  $v_n = 4 \times 3^{n-1}$

Uma vez que  $v_1 = 4 > 0$  e  $r = 3 > 1$ , então  $(v_n)$  é uma progressão geométrica crescente.

b)  $93\,750 = 150 \times r^{7-3} \Leftrightarrow r^4 = 625 \Leftrightarrow r = 5 \vee r = -5$   
 Como  $r < 0$ , então  $r = -5$ .

$$150 = v_1 \times (-5)^{3-1} \Leftrightarrow 150 = v_1 \times 25 \Leftrightarrow v_1 = 6$$

$$v_n = 6 \times (-5)^{n-1}$$

Uma vez que  $r = -5 < 0$ , então  $(v_n)$  é uma progressão geométrica não monótona.

45.

$$a) \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que  $\frac{1}{3}$  é uma constante, então  $(w_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{3}$ .

b)  $0 < r = \frac{1}{3} < 1$  e  $w_1 = \frac{2}{3} > 0$ , logo  $(w_n)$  é uma progressão geométrica decrescente.

$$c) S_n = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

46.

$$a) u_1 = 2r$$

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 = 24 &\Leftrightarrow u_1 + u_1 \times r = 24 \\ &\Leftrightarrow 2r + 2r \times r = 24 \\ &\Leftrightarrow 2r^2 + 2r - 24 = 0 \\ &\Leftrightarrow r^2 + r - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \\ &\Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm 7}{2} \\ &\Leftrightarrow r = -4 \vee r = 3 \end{aligned}$$

Como a razão é positiva, então  $r = 3$ .

$$\begin{aligned} b) \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} &\Leftrightarrow \frac{5a-3}{8a} = \frac{a+3}{5a-3} \\ &\Leftrightarrow 25a^2 - 30a + 9 = 8a^2 + 24a \\ &\Leftrightarrow 17a^2 - 54a + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{54 \pm \sqrt{2304}}{34} \\ &\Leftrightarrow a = 3 \vee a = \frac{3}{17} \\ \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} &\Leftrightarrow \frac{a+3}{5a-3} = \frac{a}{a+3} \\ &\Leftrightarrow a^2 + 6a + 9 = 5a^2 - 3a \\ &\Leftrightarrow 4a^2 - 9a - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{9 \pm \sqrt{225}}{8} \\ &\Leftrightarrow a = 3 \vee a = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Logo,  $a = 3$ .

Então,  $u_1 = 24$  e  $u_2 = 12$ .

$$\text{Assim, } r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

47.

$$a) u_1 = 2000 \times 1,013 = 2026 \text{ euros}$$

$$u_4 = 2000 \times 1,013^4 \approx 2106 \text{ euros}$$

$$b) u_n = 2026 \times 1,013^{n-1}$$

48.

a) Sucessão definida por recorrência:

$$\begin{cases} P_1 = 6\pi \\ P_n = \frac{1}{2} P_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

Termo geral da sucessão:  $P_n = 6\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

b) Se a medida do diâmetro da primeira circunferência é 6, então a medida do raio é 3.

Logo,  $A_1 = \pi \times 3^2 = 9\pi$ .

Se a razão de semelhança entre as medidas dos diâmetros das circunferências é  $\frac{1}{2}$ , então a razão de semelhança entre as respectivas áreas é  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ .

Sucessão definida por recorrência:

$$\begin{cases} A_1 = 9\pi \\ A_n = \frac{1}{4} A_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

Termo geral da sucessão:  $A_n = 9\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$$49. \text{ Seja } P(n) : \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

$$P(2): 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Logo,  $P(2)$  é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{Tese: } \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) &= \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) &= \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n},$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

$$50. \text{ Seja } P(n): \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

$$P(1): \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

**Tese:**

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \\ = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \\ = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} &= \\ = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} &= \\ = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

**51.** Seja  $P(n)$ :  $v_n = 7 + (n-1) \times 2$ .

$$P(1): v_1 = 7 + (1-1) \times 2 \Leftrightarrow 7 = 7 + 0 \Leftrightarrow 7 = 7$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $v_n = 7 + (n-1) \times 2$

**Tese:**  $v_{n+1} = 7 + n \times 2$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + 2 = 7 + (n-1) \times 2 + 2 = \\ &= 7 + 2n - 2 + 2 = \\ &= 7 + 2n = \\ &= 7 + n \times 2 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } v_n = 7 + (n-1) \times 2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

**52.** Seja  $P(n)$ :  $u = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

$$\begin{aligned} P(1): u_1 &= 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} \Leftrightarrow 7 = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ &\Leftrightarrow 7 = 7 \times 1 \Leftrightarrow 7 = 7 \end{aligned}$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $u_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

**Tese:**  $u_{n+1} = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{2} = \frac{7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2} = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \\ &= 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } u_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

**53.**

$$\begin{aligned} \text{a) } |u_n| < L &\Leftrightarrow \left| \frac{3}{2n+1} \right| < L \Leftrightarrow \frac{3}{2n+1} < L \\ &\Leftrightarrow 3 < 2nL + L \\ &\Leftrightarrow 2nL > 3 - L \\ &\Leftrightarrow n > \frac{3-L}{2L} \end{aligned}$$

Se, por exemplo,  $L = 2$ , vem que  $n > \frac{3-2}{2 \times 2}$ , ou seja,  $n > \frac{1}{4}$ , que é uma condição universal em  $\mathbb{N}$ .

Então, existe um número real positivo  $L$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < L$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } |u_n| < L &\Leftrightarrow \left| \frac{2n+1}{3} \right| < L \Leftrightarrow \frac{2n+1}{3} < L \\ &\Leftrightarrow 2n+1 < 3L \\ &\Leftrightarrow 2n < 3L - 1 \\ &\Leftrightarrow n < \frac{3L-1}{2} \end{aligned}$$

Ou seja, apenas verificam a condição  $|u_n| < L$ , os termos cuja ordem é inferior a  $\frac{3L-1}{2}$ . Logo, não existe nenhum número real  $L$  nas condições dadas.

$$\begin{aligned} \text{54. } |u_n| < L &\Leftrightarrow \left| -4 - \frac{1}{n} \right| < L \Leftrightarrow \left| -\left(4 + \frac{1}{n}\right) \right| < L \\ &\Leftrightarrow 4 + \frac{1}{n} < L \\ &\Leftrightarrow 4n + 1 < Ln \\ &\Leftrightarrow 4n - Ln < -1 \\ &\Leftrightarrow -4n + Ln > 1 \\ &\Leftrightarrow n(-4 + L) > 1 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{1}{L-4} \end{aligned}$$

Se, por exemplo,  $L = 1$ , vem que  $n > \frac{1}{1-4}$ , ou seja,  $n > -\frac{1}{3}$ , que é uma condição universal em  $\mathbb{N}$ .

Então, existe um número real positivo  $L$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < L$ .

**55.** Pretende-se calcular  $151 + 153 + \dots + 413$ .

As parcelas desta soma estão em progressão aritmética de razão 2.

Assim, o termo geral desta progressão aritmética é:

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (n-1)2 \Leftrightarrow u_n = 151 + (n-1)2 \\ &\Leftrightarrow u_n = 151 + 2n - 2 \\ &\Leftrightarrow u_n = 2n + 149 \end{aligned}$$

É agora necessário saber a ordem do termo 413:  $u_n = 413 \Leftrightarrow 2n + 149 = 413 \Leftrightarrow 2n = 264 \Leftrightarrow n = 132$ . Ou seja, a soma que se pretende determinar é constituída por 132 parcelas.

$$\text{Logo, } S = \frac{151 + 413}{2} \times 61 = 37\,224.$$

56. Seja  $P(n): \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \times (2k+1) = 2n$ .

$$P(1): \sum_{k=1}^2 (-1)^k \times (2k+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow -1 \times (2 \times 1 + 1) + 1 \times (2 \times 2 + 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow -3 + 5 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \times (2k+1) = 2n.$$

$$\text{Tese: } \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \times (2k+1) = 2n+2$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \times (2k+1) = \\ &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \times (2k+1) + (-1)^{2n+1} \times (2(2n+1) + 1) + \\ &+ (-1)^{2n+2} \times (2(2n+2) + 1) = \\ &= 2n - (4n+2+1) + (4n+4+1) = \\ &= 2n - 4n - 3 + 4n + 5 = \\ &= 2n + 2 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \times (2k+1) = 2n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

57.

a) Seja  $P(n): 3^{2n} - 1$  é divisível por 8.

$$P(1): 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8, \text{ que é divisível por 8.}$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $3^{2n} - 1$  é divisível por 8.

**Tese:**  $3^{2n+2} - 1$  é divisível por 8.

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} 3^{2n+2} - 1 &= 3^{2n} \times 3^2 - 1 = 3^{2n} \times 9 - 9 + 9 - 1 = \\ &= 9(3^{2n} - 1) + 8 \end{aligned}$$

Como, por hipótese,  $3^{2n} - 1$  é divisível por 8 e 8 é divisível por 8, então  $9(3^{2n} - 1) + 8$  é divisível por 8, por se tratar da soma de dois números divisíveis por 8.

Logo,  $3^{2n} - 1$  é, para todo o número natural  $n$ , divisível por 8.

b)  $\forall n \in \mathbb{N}, 3n^2 + n - 2$  é um número par.

Seja  $P(n): 3n^2 + n - 2$  é um número par.

$$P(1): 3 \times 1^2 + 1 - 2 = 2 \text{ é um número par.}$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $3n^2 + n - 2$  é um número par.

**Tese:**  $3(n+1)^2 + (n+1) - 2$  é um número par.

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} 3(n+1)^2 + (n+1) - 2 &= 3(n^2 + 2n + 1) + n + 1 - 2 = \\ &= 3n^2 + 7n + 2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (3n^2 + n - 2) + (6n + 4) = \\ &= (3n^2 + n - 2) + 2(3n + 2) \end{aligned}$$

Por hipótese,  $3n^2 + n - 2$  é um número par. Além disso,  $2(3n + 2)$  é um número par. A soma de dois números pares é um número par.

Logo,  $(3n^2 + n - 2) + 2(3n + 2)$  é um número par, ou seja,  $3(n+1)^2 + (n+1) - 2$  é um número par.

Logo,  $\forall n \in \mathbb{N}, 3n^2 + n - 2$  é um número par.

c) Seja  $P(n): 4^n > n^2$ .

$$P(1): 4^1 > 1^2 \Leftrightarrow 4 > 1$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $4^n > n^2$

**Tese:**  $4^{n+1} > (n+1)^2$

**Demonstração:**

$$4^{n+1} = 4^n \times 4 > 4n^2$$

Basta então provar que  $4n^2 \geq (n+1)^2$ .

$$4n^2 \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow 4n^2 \geq n^2 + 2n + 1$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 - 2n - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3n+1)(n-1) \geq 0$$

Uma vez que  $3n+1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , e que  $n-1 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , então  $(3n+1)(n-1) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Logo,  $4^n > n^2, \forall n \in \mathbb{N}$ .

58. Seja  $P(n): a^n - 1$  é um múltiplo de  $a - 1$ .

$$P(1): a^1 - 1 = a - 1, \text{ que é um múltiplo de } a - 1.$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $a^n - 1$  é um múltiplo de  $a - 1$ .

**Tese:**  $a^{n+1} - 1$  é um múltiplo de  $a - 1$ .

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} a^{n+1} - 1 &= a^n \times a - 1 = \\ &= a^n \times a - a + a - 1 = \\ &= a(a^n - 1) + a - 1 \end{aligned}$$

Como, por hipótese,  $a^n - 1$  é um múltiplo de  $a - 1$  e  $a - 1$  é um múltiplo de  $a - 1$ , então  $a(a^n - 1) + a - 1$  é um múltiplo de  $a - 1$ , por se tratar da soma de dois múltiplos de  $a - 1$ .

Logo,  $a^n - 1$  é, para todo o número natural  $n$ , um múltiplo de  $a - 1$ .

59.

a) Seja  $P(n): u_n > 1$ .

$$P(1): u_1 > 1 \Leftrightarrow 2 > 1$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $P(n): u_n > 1$

**Tese:**  $P(n): u_{n+1} > 1$

**Demonstração:**

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{3} > \frac{1 + 2}{3} = 1, \text{ ou seja, } u_{n+1} > 1.$$

Logo,  $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + 2}{3} - u_n = \\ &= \frac{u_n + 2 - 3u_n}{3} = \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3} u_n \end{aligned}$$

Pela alínea anterior:

$$u_n > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} u_n > \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} u_n < -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} - \frac{2}{3} u_n < 0$$

Logo, como  $u_{n+1} - u_n < 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , a sucessão  $(u_n)$  é decrescente.

**60.** Sejam  $u_n = u_1 + (n-1)r$  e  $v_n = v_1 + (n-1)r'$  os termos gerais de duas progressões aritméticas  $(u_n)$  e  $(v_n)$  de razões  $r$  e  $r'$ , respetivamente. Seja  $(w_n)$  a sucessão cujo termo geral é a soma dos termos gerais de  $(u_n)$  e  $(v_n)$ .

$$\begin{aligned} w_n = u_n + v_n &= u_1 + (n-1)r + v_1 + (n-1)r' = \\ &= u_1 + v_1 + (n-1)(r+r') \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \\ &= u_1 + v_1 + n(r+r') - (u_1 + v_1 + (n-1)(r+r')) = \\ &= u_1 + v_1 + n(r+r') - u_1 - v_1 - n(r+r') + (r+r') = \\ &= r+r', \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Uma vez que  $r+r'$  é uma constante, então  $(w_n)$  é uma progressão aritmética de razão  $r+r'$ .

$$\begin{aligned} \text{61. } u_{n+1} - u_n &= a(n+1) + b - (an + b) = \\ &= an + a + b - an - b = \\ &= a \end{aligned}$$

Uma vez que  $a$  é uma constante, então  $(u_n)$  é uma progressão aritmética de razão  $a$ .

**62.**

$$\begin{aligned} \text{a) } u_2 - u_1 &= u_3 - u_2 \Leftrightarrow x^2 - (x-1) = x+5 - x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = x+5 - x^2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Uma vez que  $x$  é negativo, então  $x = -1$ .

Assim:

$$\begin{aligned} u_1 &= -1 - 1 = -2 \\ u_2 &= (-1)^2 = 1 \\ u_3 &= -1 + 5 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } r &= u_2 - u_1 = 1 - (-2) = 3 \\ u_n &= u_5 + 3(n-5) \Leftrightarrow u_n = 4 + 3n - 15 \\ &\Leftrightarrow u_n = 3n - 11 \end{aligned}$$

**63.** Sejam  $x, x+r, x+2r, x+3r, x+4r$  as medidas de amplitude dos ângulos internos do pentágono, em graus.

$$x + x + r + x + 2r + x + 3r + x + 4r = 180^\circ(5-2)$$

$$\Leftrightarrow 5x + 10r = 540^\circ$$

$$\Leftrightarrow x + 2r = 108^\circ$$

Assim,  $x + 2r = 108^\circ$  é a amplitude do ângulo mediano do pentágono considerado.

$$\text{64. } \begin{cases} u_k + u_{k+1} + u_{k+2} = 18 \\ u_k \times u_{k+1} \times u_{k+2} = 66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_k + u_k + r + u_k + 2r = 18 \\ u_k \times (u_k + r) \times (u_k + 2r) = 66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_k + 3r = 18 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_k + r = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_k = 6 - r \\ (6 - r) \times (6 - r + r) \times (6 - r + 2r) = 66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (6 - r) \times 6 \times (6 + r) = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 - r^2 = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_k = 1 \\ r = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} u_k = 11 \\ r = -5 \end{cases}$$

Se  $u_k = 1$  e  $r = 5$ , então  $u_{k+1} = 6$  e  $u_{k+2} = 11$ .

Se  $u_k = 11$  e  $r = -5$ , então  $u_{k+1} = 6$  e  $u_{k+2} = 1$ .

$$\text{65. } u_{n+1} - u_n = 3$$

$$\begin{aligned} \frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{2^{-3u_{n+1}}}{2^{-3u_n}} = 2^{-3u_{n+1} + 3u_n} = \\ &= 2^{-3(u_{n+1} - u_n)} = \\ &= 2^{-3 \times 3} = \\ &= 2^{-9} = \\ &= \frac{1}{512}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Como  $\frac{1}{512}$  é uma constante, então  $(w_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{512}$ .

**66.** Sejam  $u_n = u_1 \times r^{n-1}$  e  $v_n = v_1 \times r'^{n-1}$  os termos gerais de duas progressões geométricas  $(u_n)$  e  $(v_n)$  de razões  $r$  e  $r'$ , respetivamente. Seja  $(w_n)$  a sucessão cujo termo geral é o produto dos termos gerais de  $(u_n)$  e  $(v_n)$ .

$$\begin{aligned} w_n &= u_n \times v_n = u_1 \times r^{n-1} \times v_1 \times r'^{n-1} = \\ &= u_1 \times v_1 \times (r \times r')^{n-1} \end{aligned}$$

Então:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_1 \times v_1 \times (r \times r')^n}{u_1 \times v_1 \times (r \times r')^{n-1}} =$$



$$= (r \times r')^{n-n+1} =$$

$$= r \times r', \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que  $r \times r'$  é uma constante, então  $(w_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $r \times r'$ .

$$67. \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a \times b^{c(n+1)+d}}{a \times b^{cn+d}} =$$

$$= \frac{b^{cn+c+d}}{b^{cn+d}} =$$

$$= b^{cn+c+d-cn-d} =$$

$$= b^c, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que  $b^c$  é uma constante, então  $(u_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $b^c$ .

68.

a) A medida do lado do quadrado  $[ABCD]$  é 16.

$$\overline{AE} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\overline{AF} = \frac{3}{4} \times 16 = 12$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{EF}^2 = 4^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{EF}^2 = 160$$

Logo,  $\overline{EF} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ , isto é, a medida do lado do quadrado  $[EFGH]$  é  $4\sqrt{10}$ .

$$\overline{EI} = \frac{4\sqrt{10}}{4} = \sqrt{10}$$

$$\overline{EJ} = \frac{3}{4} \times 4\sqrt{10} = 3\sqrt{10}$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{IJ}^2 = (\sqrt{10})^2 + (3\sqrt{10})^2 \Leftrightarrow \overline{IJ}^2 = 100$$

Logo,  $\overline{IJ} = \sqrt{100} = 10$ , isto é, a medida do lado do quadrado  $[IJKL]$  é 10.

b)

i)  $A_1 = 16$

$$A_2 = 4\sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{4} \times 16$$

$$A_3 = 10 = \frac{\sqrt{10}}{4} \times 4\sqrt{10}$$

E assim sucessivamente.

$$\text{Então, } A_1 = 16 \wedge A_{n+1} = \frac{\sqrt{10}}{4} A_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{4} A_n}{A_n} = \frac{\sqrt{10}}{4}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que  $\frac{\sqrt{10}}{4}$  é uma constante, então  $(A_n)$  é

uma progressão geométrica de razão  $\frac{\sqrt{10}}{4}$ .

ii) Uma vez que  $(A_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{\sqrt{10}}{4}$  e primeiro termo 16, então o seu termo

$$\text{geral é } A_n = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim:

$$A_n = 16 \times \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1} =$$

$$= 16 \times (\sqrt{10})^{n-1} \times 4^{-n+1} =$$

$$= 2^4 \times (2^2)^{-n+1} \times (10^{\frac{1}{2}})^{n-1} =$$

$$= 2^4 \times 2^{-2n+2} \times 10^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$= 2^{4-2n+2} \times (2 \times 5)^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$= 2^{-2n+6} \times 2^{\frac{n-1}{2}} \times 5^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$= 2^{-2n+6+\frac{n-1}{2}} \times 5^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$= 2^{\frac{-4n+12+n-1}{2}} \times 5^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$= 2^{\frac{11-3n}{2}} \times 5^{\frac{n-1}{2}}$$

$$c) A_n = \frac{25}{4} \Leftrightarrow 2^{\frac{11-3n}{2}} \times 5^{\frac{n-1}{2}} = \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{11-3n}{2}} \times 5^{\frac{n-1}{2}} = 5^2 \times 2^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11-3n}{2} = -2 \\ \frac{n-1}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11-3n = -4 \\ n-1 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3n = -15 \\ n = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow n = 5$$

Sim, para  $n = 5$  tem-se que  $A_n = \frac{25}{4}$ .

d)  $B_n = A_n \times A_n =$

$$= 16 \times \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1} \times 16 \times \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1} =$$

$$= 256 \times \left(\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1}\right)^2 =$$

$$= 256 \times \left(\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2\right)^{n-1} =$$

$$= 256 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$$

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{256 \times \left(\frac{5}{8}\right)^n}{256 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}} = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-n+1} = \frac{5}{8}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que  $\frac{5}{8}$  é uma constante, então  $(B_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{5}{8}$  e termo geral

$$\begin{aligned} B_n &= 256 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} = 2^8 \times \frac{5^{n-1}}{2^{3n-3}} = \\ &= 2^{8-3n+3} \times 5^{n-1} = \\ &= 2^{11-3n} \times 5^{n-1} \end{aligned}$$

**69.** Se  $0 \leq p \leq n-1$ , e uma vez que os termos da sequência  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  estão em progressão geométrica, tem-se que:

$$\begin{aligned} u_{p+1} &= u_1 \times r^{n-1-p} \\ u_{n-p} &= u_1 \times r^{n-n+p} = u_1 \times r^p \\ u_n &= u_1 \times r^{n-1} \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} u_{1+p} \times u_{n-p} &= u_1 \times r^{n-1-p} \times u_1 \times r^p = \\ &= u_1 \times u_1 \times r^{n-1-p+p} = \\ &= u_1 \times u_1 \times r^{n-1} = \\ &= u_1 \times u_n \end{aligned}$$

## Unidade 4 - Limites de sucessões

Páginas 58 a 94

**56.**

**a)**  $u_n = 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n > 100$

Logo, a partir do termo de ordem 100, os termos da sucessão  $u_n = \frac{1}{n}$  são menores que 0,01.

**b)**  $u_n < 0,001 \Leftrightarrow \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{1000}$   
 $\Leftrightarrow 2n+1 > 1000$   
 $\Leftrightarrow n > 499,5$

Logo, a partir do termo de ordem 499, os termos da sucessão  $u_n = \frac{1}{2n+1}$  são menores que 0,001.

**c)**  $\left| \frac{n}{3n+1} - \frac{1}{3} \right| < 0,0001 \Leftrightarrow \left| \frac{3n-3n-1}{3(3n+1)} \right| < \frac{1}{10\,000}$   
 $\Leftrightarrow \left| \frac{-1}{3(3n+1)} \right| < \frac{1}{10\,000}$   
 $\Leftrightarrow \frac{1}{3(3n+1)} < \frac{1}{10\,000}$   
 $\Leftrightarrow 3(3n+1) > 10\,000$   
 $\Leftrightarrow 3n+1 > \frac{10\,000}{3}$   
 $\Leftrightarrow n > \frac{9997}{9}$

Logo, uma vez que  $\frac{9997}{9} \approx 1110,8$ , a partir do termo de ordem 1110, os termos da sucessão  $u_n = \frac{n}{3n+1}$  distam de  $\frac{1}{3}$  menos de 0,0001.

**57.**

**a) i)**  $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < 0,03 \Leftrightarrow \left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < 0,03$   
 $\Leftrightarrow \left| \frac{2n+2-2n-1}{2(2n+1)} \right| < 0,03$   
 $\Leftrightarrow \left| \frac{1}{2(2n+1)} \right| < 0,03$   
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{3}{100}$   
 $\Leftrightarrow 2(2n+1) > \frac{100}{3}$   
 $\Leftrightarrow 2n+1 > \frac{50}{3}$   
 $\Leftrightarrow n > \frac{47}{6} (\approx 7,8)$

Logo, a partir do termo de ordem 7,  $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < 0,03$ .

**ii)**  $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < 0,001 \Leftrightarrow \left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < 0,001$   
 $\Leftrightarrow \left| \frac{2n+2-2n-1}{2(2n+1)} \right| < 0,001$   
 $\Leftrightarrow \left| \frac{1}{2(2n+1)} \right| < \frac{1}{1000}$   
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{1000}$   
 $\Leftrightarrow 2(2n+1) > 1000$   
 $\Leftrightarrow 2n+1 > 500$   
 $\Leftrightarrow n > 249,5$

Logo, a partir do termo de ordem 249, os termos da sucessão  $(u_n)$  distam de  $\frac{1}{2}$  menos de 0,001.

**iii)**  $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \delta$   
 $\Leftrightarrow \left| \frac{2n+2-2n-1}{2(2n+1)} \right| < \delta$   
 $\Leftrightarrow \left| \frac{1}{2(2n+1)} \right| < \delta$   
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2(2n+1)} < \delta$   
 $\Leftrightarrow 2(2n+1) > \frac{1}{\delta}$   
 $\Leftrightarrow 2n+1 > \frac{1}{2\delta}$   
 $\Leftrightarrow 2n > \frac{1}{2\delta} - 1$

$$\Leftrightarrow 2n > \frac{1-2\delta}{2\delta}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1-2\delta}{4\delta}$$

Logo, a partir do termo de ordem  $p$ , sendo  $n \geq p$  e  $p > \frac{1-2\delta}{4\delta}$ , os termos da sucessão  $(u_n)$  distam de  $\frac{1}{2}$  menos de  $\delta$ .

- b)** Pela alínea anterior, se  $n > \frac{1-2\delta}{4\delta}$ , então  $\left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \delta$ , e, portanto, se  $p > \frac{1-2\delta}{4\delta}$ , fica provado que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \delta$ , ou seja, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$ .

**58.**

- a)** Pretende-se provar que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta$ .

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$$

Assim, se  $n > \frac{1}{\delta}$ , então  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta$ , e, portanto, se  $p > \frac{1}{\delta}$ , fica provado que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta$ , ou seja, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

- b)** Pretende-se provar que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{6n}{2n+1} - 3 \right| < \delta$ .

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

$$\left| \frac{6n}{2n+1} - 3 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{6n-6n-3}{2n+1} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-3}{2n+1} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2n+1} < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+1}{3} > \frac{1}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow 2n+1 > \frac{3}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow 2n > \frac{3-\delta}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{3-\delta}{2\delta}$$

Assim, se  $n > \frac{3-\delta}{2\delta}$ , então  $\left| \frac{6n}{2n+1} - 3 \right| < \delta$ , e, portanto, se  $p > \frac{3-\delta}{2\delta}$ , fica provado que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$

$\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{6n}{2n+1} - 3 \right| < \delta$ , ou seja, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{2n+1} = 3$ .

- c)** Pretende-se provar que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n^2}{n^2+1} - 1 \right| < \delta$ .

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

$$\left| \frac{n^2}{n^2+1} - 1 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{n^2-n^2-1}{n^2+1} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-1}{n^2+1} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2+1} < \delta$$

$$\Leftrightarrow n^2+1 > \frac{1}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\delta} - 1$$

Assim, se  $n > \sqrt{\frac{1}{\delta} - 1}$ , então  $\left| \frac{n^2}{n^2+1} - 1 \right| < \delta$ , e, portanto, se  $p > \sqrt{\frac{1}{\delta} - 1}$ , fica provado que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$

$\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n^2}{n^2+1} - 1 \right| < \delta$ , ou seja, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ .

- d)** Pretende-se provar que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1-2n}{3n+4} + \frac{2}{3} \right| < \delta$ .

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

$$\left| \frac{1-2n}{3n+4} + \frac{2}{3} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{3-6n+6n+8}{3(3n+4)} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{11}{3(3n+4)} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{3(3n+4)} < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(3n+4)}{11} > \frac{1}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow 3n+4 > \frac{11}{3\delta}$$

$$\Leftrightarrow 3n > \frac{11}{3\delta} - 4$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{11}{9\delta} - \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{11-36\delta}{9\delta}$$

Assim, se  $n > \frac{11-36\delta}{9\delta}$ , então  $\left| \frac{1-2n}{3n+4} + \frac{2}{3} \right| < \delta$ , e,

portanto, se  $p > \frac{11-36\delta}{9\delta}$ , fica provado que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1-2n}{3n+4} + \frac{2}{3} \right| < \delta,$$

ou seja, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{3n+4} = -\frac{2}{3}$ .

**59.** Pretende-se provar que a proposição  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |2n+3-3| < \delta$  é falsa. Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

$$|2n+3-3| < \delta \Leftrightarrow 2n < \delta \Leftrightarrow n < \frac{\delta}{2}$$

Assim, os únicos termos da sucessão que são valores aproximados de 3 com erro inferior a  $\delta$  são os de ordem inferior a  $\frac{\delta}{2}$  e não todos a partir de uma certa ordem.

Logo, a proposição acima é falsa, ou seja, a sucessão  $(u_n)$  não tende para 3.

**60.**

**a)** Por exemplo, a sucessão de termo geral  $u_n = -\frac{1}{n}$  é convergente para 0.

**b)** Por exemplo, a sucessão de termo geral  $u_n = -2 + \frac{1}{n}$  é convergente para -2.

**c)** Por exemplo, a sucessão de termo geral  $u_n = n$  é divergente, já que  $\lim u_n = +\infty$ .

**61.** A afirmação (I) é falsa.

Contraexemplo: seja  $(u_n)$  a sucessão de termo geral  $u_n = 2 - \frac{(-1)^n}{n}$ . Tem-se que  $\lim u_n = 2$ , mas a sucessão não é monótona, já que  $u_2 - u_1 = 1,5 - 3 < 0$  e  $u_3 - u_2 = \frac{5}{3} - 1,5 > 0$ .

A afirmação (II) é falsa, uma vez que  $\lim u_n = 2$  e a afirmação dada é equivalente a  $\lim u_n = 3$ .

A afirmação (III) é verdadeira, pois, sendo  $(u_n)$  uma sucessão convergente, é limitada.

**62.**

**a)** Contraexemplo: a sucessão de termo geral  $u_n = n$  é monótona e não é convergente.

**b)** Contraexemplo: a sucessão de termo geral  $u_n = (-1)^n$  é limitada e não é convergente.

**c)** Contraexemplo: a sucessão de termo geral  $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$  é convergente mas não é monótona.

**63.**  $u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo,  $(u_n)$  é decrescente.

Uma vez que  $(u_n)$  é decrescente,  $u_1 \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Além disso,  $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Logo,  $(u_n)$  é limitada.

Assim,  $(u_n)$  é monótona e é limitada, logo  $(u_n)$  é convergente. No entanto, os dados do enunciado não permitem concluir para que valor tende a sucessão.

Então, a afirmação que não é necessariamente verdadeira é a opção (D).

**64.**

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad a_{n+1} - a_n &= \frac{3}{(n+1)^2} - \frac{3}{n^2} = \\ &= \frac{3n^2 - 3n^2 - 6n - 3}{(n+1)^2 n^2} = \\ &= \frac{-6n-3}{(n+1)^2 n^2} = \\ &= -\frac{6n+3}{(n+1)^2 n^2} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, a sucessão  $(a_n)$  é decrescente.

Por outro lado, como  $0 < \frac{1}{n^2} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ , então  $0 < \frac{3}{n^2} \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$ . Logo, a sucessão  $(a_n)$  é limitada.

Assim, a sucessão  $(a_n)$  é convergente, por se tratar de uma sucessão monótona e limitada.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad b_{n+1} - b_n &= \frac{6(n+1)-1}{n+1} - \frac{6n-1}{n} = \\ &= \frac{6n+5}{n+1} - \frac{6n-1}{n} = \\ &= \frac{6n^2+5n-6n^2-6n+n+1}{n(n+1)} = \\ &= \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, a sucessão  $(b_n)$  é crescente.

Por outro lado,  $b_n = \frac{6n-1}{n} = 6 - \frac{1}{n}$  e, como  $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ , então

$$0 > -\frac{1}{n} \geq -1 \Leftrightarrow 6 > 6 - \frac{1}{n} \geq -5, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, a sucessão  $(b_n)$  é limitada.

Assim, a sucessão  $(b_n)$  é convergente, por se tratar de uma sucessão monótona e limitada.

**65.** Tem-se que  $-1 \leq \sin n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ , pelo que a sucessão de termo geral  $u_n = \sin n$  é uma sucessão limitada.

Por outro lado,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

$$\text{Logo, } \lim \left( \sin n \times \frac{1}{n} \right) = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{\sin n}{n} = 0.$$

66.

a)  $u_n > 10\,000 \Leftrightarrow 2n + 1 > 10\,000 \Leftrightarrow n > 4999,5$   
 A menor ordem depois da qual os termos da sucessão  $(u_n)$  são maiores que 10 000 é 4999.

b)  $u_n > 10\,000 \Leftrightarrow 3n^2 - 6n > 10\,000$   
 $\Leftrightarrow 3n^2 - 6n - 10\,000 > 0$

**Cálculo auxiliar:**

$$3n^2 - 6n - 10\,000 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12 \times 10\,000}}{6}$$

Logo,  $n \approx -56,744 \vee n \approx 58,744$ .

A menor ordem depois da qual os termos da sucessão  $(u_n)$  são maiores que 10 000 é 58.

c)  $u_n > 10\,000 \Leftrightarrow n^2 - 1 > 10\,000 \Leftrightarrow n^2 - 10\,001 > 0$

**Cálculo auxiliar:**

$$n^2 - 10\,001 = 0 \Leftrightarrow n = \sqrt{10\,001} \vee n = -\sqrt{10\,001}$$

Logo,  $n \approx -100,005 \vee n \approx 100,005$ .

A menor ordem depois da qual os termos da sucessão  $(u_n)$  são maiores que 10 000 é 100.

d)  $u_n > 10\,000 \Leftrightarrow \sqrt{n} + 4 > 10\,000$   
 $\Leftrightarrow \sqrt{n} > 9996$   
 $\Leftrightarrow n > 99\,920\,016$

A menor ordem depois da qual os termos da sucessão  $(u_n)$  são maiores que 10 000 é 99 920 016.

67.

a)  $u_n < -10\,000 \Leftrightarrow -2n + 10 < -10\,000$   
 $\Leftrightarrow -2n < -10\,010$   
 $\Leftrightarrow 2n > 10\,010$   
 $\Leftrightarrow n > 5005$

A menor ordem depois da qual os termos da sucessão  $(u_n)$  são menores que -10 000 é 5005.

b)  $u_n < -10\,000 \Leftrightarrow -n^2 - 10n < -10\,000$   
 $\Leftrightarrow -n^2 - 10n + 10\,000 < 0$   
 $\Leftrightarrow n^2 + 10n - 10\,000 > 0$

**Cálculo auxiliar:**

$$n^2 + 10n - 10\,000 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 40\,000}}{2}$$

Logo,  $n \approx -105,12 \vee n \approx 95,125$ .

A menor ordem depois da qual os termos da sucessão  $(u_n)$  são menores que -10 000 é 95.

68.

a) Dado  $L \in \mathbb{R}^+$ :

$$n - 10 > L \Leftrightarrow n > L + 10$$

Então, para qualquer  $L > 0$ , se considerarmos um número natural  $p$ , superior a  $L + 10$ , tem-se  $n - 10 > L$ , desde que  $n \geq p$ .

Fica provado que  $\lim (n - 10) = +\infty$ .

b) Dado  $L \in \mathbb{R}^+$ :

$$6 - 2n < -L \Leftrightarrow -2n < -L - 6$$

$$\Leftrightarrow 2n > L + 6$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{L + 6}{2}$$

Então, para qualquer  $L > 0$ , se considerarmos um número natural  $p$ , superior a  $\frac{L + 6}{2}$ , tem-se

$$6 - 2n < -L, \text{ desde que } n \geq p.$$

Fica provado que  $\lim (6 - 2n) = -\infty$ .

69.

a) Se  $(u_n)$  é uma progressão aritmética de razão  $r > 0$ , então  $u_n = u_1 + r(n - 1)$ .

Dado  $L \in \mathbb{R}^+$ :

$$u_1 + r(n - 1) > L \Leftrightarrow r(n - 1) > L - u_1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{n - 1}_{r > 0} > \frac{L - u_1}{r}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{L - u_1}{r} + 1$$

Então, para qualquer  $L > 0$ , se considerarmos um número natural  $p$ , superior a  $\frac{L - u_1}{r} + 1$ , tem-se

$$u_1 + r(n - 1) > L, \text{ desde que } n \geq p.$$

Fica provado que  $\lim u_n = +\infty$ .

b) Se  $(u_n)$  é uma progressão aritmética de razão  $r < 0$ , então  $u_n = u_1 + r(n - 1)$ .

Dado  $L \in \mathbb{R}^+$ :

$$u_1 + r(n - 1) < -L \Leftrightarrow r(n - 1) < -L - u_1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{n - 1}_{r < 0} > \frac{L - u_1}{r}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{L - u_1}{r} + 1$$

Então, para qualquer  $L > 0$ , se considerarmos um número natural  $p$ , superior a  $\frac{L - u_1}{r} + 1$ , tem-se

$$u_1 + r(n - 1) < -L, \text{ desde que } n \geq p.$$

Fica provado que  $\lim u_n = -\infty$ .

70.

a) Pretende-se provar que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n+2}{3n+1} - \frac{1}{3} \right| < \delta.$$

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

$$\begin{aligned} \left| \frac{n+2}{3n+1} - \frac{1}{3} \right| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{3n+6-3n-1}{3(3n+1)} \right| < \delta \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{5}{3(3n+1)} \right| < \delta \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{3(3n+1)} < \delta \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3n+1} < \frac{3\delta}{5} \\ &\Leftrightarrow 3n+1 > \frac{5}{3\delta} \\ &\Leftrightarrow 3n > \frac{5}{3\delta} - 1 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{5}{9\delta} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Assim, se  $n > \frac{5}{9\delta} - \frac{1}{3}$ , então  $\left| \frac{n+2}{3n+1} - \frac{1}{3} \right| < \delta$ , e, portanto, se  $p > \frac{5}{9\delta} - \frac{1}{3}$ , fica provado que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$

$\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n+2}{3n+1} - \frac{1}{3} \right| < \delta$ , ou seja, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n+1} = \frac{1}{3}$ .

**b)** Dado  $L \in \mathbb{R}^+$ .

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{4} > L &\Leftrightarrow 2n-1 > 4L \\ &\Leftrightarrow 2n > 4L+1 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{4L+1}{2} \end{aligned}$$

Então, para qualquer  $L > 0$ , se considerarmos um número natural  $p$ , superior a  $\frac{4L+1}{2}$ , tem-se  $\frac{2n-1}{4} > L$ , desde que  $n \geq p$ .  
Fica provado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{4} = +\infty$ .

**c)** Dado  $L \in \mathbb{R}^+$ .

$$\begin{aligned} \frac{-n+5}{7} < -L &\Leftrightarrow -n+5 < -7L \\ &\Leftrightarrow -n < -7L+5 \\ &\Leftrightarrow n > 7L-5 \end{aligned}$$

Então, para qualquer  $L > 0$ , se considerarmos um número natural  $p$ , superior a  $7L-5$ , tem-se  $\frac{-n+5}{7} < -L$ , desde que  $n \geq p$ .  
Fica provado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n+5}{7} = -\infty$ .

**d)** Pretende-se provar que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N},$

$$n \geq p \Rightarrow \left| \frac{5}{7} - \frac{5}{7} \right| < \delta.$$

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

$$\left| \frac{5}{7} - \frac{5}{7} \right| < \delta \Leftrightarrow 0 < \delta \Leftrightarrow \delta < 0$$

Assim, para qualquer  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \left| \frac{5}{7} - \frac{5}{7} \right| < \delta$ , qualquer que seja  $n$  natural, ou seja, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{7} = \frac{5}{7}$ .

**71.**

**a)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+1}{3n+2} = \frac{6}{3} = 2$

**b)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-1}{10} = +\infty$

**c)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{-4} = -\infty$

**d)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} 9 = 9$

**72.**

**a)** Dado  $L \in \mathbb{R}^+$ .

$$n^2 > L \Leftrightarrow n > \sqrt{L}$$

Então, para qualquer  $L > 0$ , se considerarmos um número natural  $p$ , superior a  $\sqrt{L}$ , tem-se  $n^2 > L$ , desde que  $n \geq p$ .

Fica provado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$ .

**b)** Dado  $L \in \mathbb{R}^+$ .

$$\sqrt{n} > L \Leftrightarrow n^2 > L^2$$

Então, para qualquer  $L > 0$ , se considerarmos um número natural  $p$ , superior a  $L^2$ , tem-se  $\sqrt{n} > L$ , desde que  $n \geq p$ .

Fica provado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$ .

**c)** Pretende-se provar que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N},$

$$n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \delta.$$

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \delta &\Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \delta \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \delta \\ &\Leftrightarrow n^2 > \delta \\ &\Leftrightarrow n > \sqrt{\delta} \end{aligned}$$

Assim, se  $n > \sqrt{\delta}$ , então  $\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \delta$ , e, portanto, se  $p > \sqrt{\delta}$ , fica provado que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}:$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \delta, \text{ ou seja, que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

**d)** Pretende-se provar que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N},$

$$n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \delta.$$

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \delta$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} > \delta$$

$$\Leftrightarrow n > \delta^2$$

Assim, se  $n > \delta^2$ , então  $\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \delta$ , e, portanto,

se  $p > \delta^2$ , fica provado que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}$ :

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \delta$ , ou seja, que

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

**73.**

**a)**  $\lim n^3 = +\infty$

**b)**  $\lim \sqrt{n^2} = +\infty$

**c)**  $\lim n^{\frac{3}{4}} = +\infty$

**d)**  $\lim n^{-\frac{3}{4}} = 0$

**e)**  $\lim \frac{1}{n^3} = 0$

**f)**  $\lim \frac{1}{\sqrt{n^5}} = 0$

**74.**

**a)**  $a_1 + b_1 = -1 + 2 = 1$

$a_2 + b_2 = 1 + 1 = 2$

$a_3 + b_3 = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

**b)**  $a_n + b_n = (-1)^n + \frac{2}{n}$

**75.**

**a)**  $c_1 \times d_1 = \frac{2}{6} \times 2 = \frac{2}{3}$

$c_2 \times d_2 = \frac{4}{11} \times 1 = \frac{4}{11}$

$c_3 \times d_3 = \frac{6}{16} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$

**b)**  $c_n \times d_n = \frac{2n}{5n+1} \times \frac{2}{n} = \frac{4}{5n+1}$

**c)**  $\lim c_n = \lim \frac{2n}{5n+1} = \frac{2}{5}$

$\lim d_n = \lim \frac{2}{n} = 0$

$\lim (c_n \times d_n) = \lim \frac{4}{5n+1} = 0$

**d)**  $\lim \frac{1}{c_n} = \lim \frac{5n+1}{2n} = \frac{5}{2}$

**76.**

**a)**  $\frac{e_n}{f_n} = \frac{\frac{6n+1}{n}}{\frac{2n+7}{n+1}} = \frac{(6n+1)(n+1)}{n(2n+7)} = \frac{6n^2+7n+1}{2n^2+7n}$

**b)**  $\lim e_n = \lim \frac{6n+1}{n} = 6$

$\lim f_n = \lim \frac{2n+7}{n+1} = 2$

**c)**  $\lim \left( \frac{e_n}{f_n} \right) = \frac{6}{2} = 3$

$\lim \left( \frac{f_n}{e_n} \right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

**77.**

**a)**  $\lim g_n = \lim n^{-2} = 0$

$\lim h_n = \lim \frac{4n}{2n+1} = \frac{4}{2} = 2$

**b)**  $\lim (2016g_n) = 2016 \times 0 = 0$

**c)**  $\lim (7h_n) = 7 \times 2 = 14$

**d)**  $\lim (g_n - h_n) = 0 - 2 = -2$

**e)**  $\lim (2g_n - 3h_n) = 2 \times 0 - 3 \times 2 = -6$

**78.**

**a)**  $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n =$   
 $= \lim \frac{-n+5}{4n+4} + \lim \left( 3 - \frac{1}{n} \right) =$   
 $= -\frac{1}{4} + 3 =$   
 $= \frac{11}{4}$

**b)**  $\lim (b_n \times c_n) = \lim b_n \times \lim c_n =$   
 $= \lim \left( 3 - \frac{1}{n} \right) \times \lim \frac{1}{n^3} =$   
 $= 3 \times 0 =$   
 $= 0$

**c)**  $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n} = \frac{1}{\lim \left( 3 - \frac{1}{n} \right)} = \frac{1}{3}$

**d)**  $\lim \frac{c_n}{b_n} = \frac{\lim c_n}{\lim b_n} = \frac{\lim \frac{1}{n^3}}{\lim \left( 3 - \frac{1}{n} \right)} = \frac{0}{3} = 0$

**e)**  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{\lim \frac{-n+5}{4n+4}}{\lim \left( 3 - \frac{1}{n} \right)} = \frac{-\frac{1}{4}}{3} = -\frac{1}{12}$

**f)**  $\lim (a_n)^2 = (\lim a_n)^2 = \left( \lim \frac{-n+5}{4n+4} \right)^2 = \left( -\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{16}$

$$\text{g) } \lim (b_n)^{\frac{1}{2}} = (\lim b_n)^{\frac{1}{2}} = \left( \lim \left( 3 - \frac{1}{n} \right) \right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$79. \lim \frac{2v_n - 5u_n}{(u_n)^2} = \frac{2 \times 3 - 5 \times (-1)}{(-1)^2} = 6 + 5 = 11$$

80.

$$\text{a) } \lim u_n = \lim n^3 = +\infty$$

$$\text{b) } \lim v_n = \lim 5 = 5$$

$$\text{c) } \lim w_n = \lim (-n) = -\infty$$

$$\text{d) } \lim t_n = \lim \sqrt{n} = +\infty$$

$$\text{e) } \lim (u_n + v_n) = +\infty + 5 = +\infty$$

$$\text{f) } \lim (u_n + t_n) = +\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$\text{g) } \lim (v_n + w_n) = 5 + (-\infty) = -\infty$$

81.

$$\text{a) } \lim (a_n + b_n) = +\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$\text{b) } \lim (a_n + d_n) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\text{c) } \lim (a_n + e_n) = +\infty + (-2) = +\infty$$

$$\text{d) } \lim (a_n + c_n) = +\infty + (-\infty) \text{ Nada se pode concluir.}$$

$$\text{e) } \lim (a_n \times b_n) = +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

$$\text{f) } \lim (a_n \times c_n) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

$$\text{g) } \lim (a_n \times e_n) = +\infty \times (-2) = -\infty$$

$$\text{h) } \lim (c_n \times e_n) = -\infty \times (-2) = +\infty$$

$$\text{i) } \lim (b_n \times d_n) = +\infty \times 0 \text{ Nada se pode concluir.}$$

$$\text{j) } \lim (c_n \times d_n) = -\infty \times 0 \text{ Nada se pode concluir.}$$

$$\text{k) } \lim (c_n^{2016}) = (-\infty)^{2016} = +\infty$$

$$\text{l) } \lim (c_n^{2017}) = (-\infty)^{2017} = -\infty$$

82.

$$\text{a) } \lim (n^2 - n) = \lim \left( n^2 \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right) = +\infty \times (1 - 0) = +\infty$$

$$\text{b) } \lim (-n^2 + n) = \lim \left( -n^2 \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right) = -\infty \times (1 - 0) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim \left( 2n^3 - 4n^2 + \frac{6}{5}n - 9 \right) &= \\ &= \lim \left( 2n^3 \left( 1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{5n^2} - \frac{9}{2n^3} \right) \right) = \\ &= +\infty \times (1 - 0 + 0 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim (-\pi n^4 + 3n^2 - n + 4) &= \\ &= \lim \left( -\pi n^4 \left( 1 - \frac{3}{\pi n^2} + \frac{1}{\pi n^3} - \frac{4}{\pi n^4} \right) \right) = \\ &= -\infty \times (1 - 0 + 0 - 0) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim (-4n^5 - n^4 + 4n^3 + 6n - 9) &= \\ &= \lim \left( -4n^5 \left( 1 + \frac{1}{4n} - \frac{1}{n^2} - \frac{3}{2n^4} + \frac{9}{4n^5} \right) \right) = \\ &= -\infty \times (1 + 0 - 0 - 0 + 0) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim \left( \frac{8}{3}n^{10} + n^7 - 4n^2 + 6n - 9 \right) &= \\ &= \lim \left( \frac{8}{3}n^{10} \left( 1 + \frac{3}{8n^3} - \frac{3}{2n^8} + \frac{9}{4n^9} - \frac{27}{8n^{10}} \right) \right) = \\ &= +\infty \times (1 + 0 - 0 + 0 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

83.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim \frac{6n^3 - 2n^2 + n}{2n^3 - n} &= \lim \frac{n^3 \left( 6 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^3 \left( 2 - \frac{1}{n^2} \right)} = \\ &= \lim \frac{6 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} = \\ &= \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim \frac{8n - 9}{-4 - n} = \frac{8}{-1} = -8$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim \frac{2n^2 - 7n + 1}{n^2 + 1} &= \lim \frac{n^2 \left( 2 - \frac{7}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \\ &= \lim \frac{2 - \frac{7}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim \frac{n^3 + 5n + 1}{3 - n^2} &= \lim \frac{n^3 \left( 1 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^2 \left( \frac{3}{n^2} - 1 \right)} = \\ &= \lim \frac{n \left( 1 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{\frac{3}{n^2} - 1} = \frac{+\infty}{-1} = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim \frac{n^2}{n^3 + 1} &= \lim \frac{n^2}{n^3 \left( 1 + \frac{1}{n^3} \right)} = \\ &= \lim \frac{n^2}{n^3} \times \lim \frac{1}{1 + \frac{1}{n^3}} = \\ &= \lim \frac{1}{n} \times \lim \frac{1}{1 + \frac{1}{n^3}} = \\ &= 0 \times 1 = \\ &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n^4 - 2n + 1}{-3n^3 - n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left( -6 - \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right)}{n^3 \left( -3 - \frac{1}{n^2} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( -6 - \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right)}{-3 - \frac{1}{n^2}} = \frac{-\infty}{-3} = +\infty \end{aligned}$$

84.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n}{n^2 + 1}}{\frac{n^2}{2n^4 + 1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n(2n^4 + 1)}{n^2(n^2 + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^4 + 4}{n^3 + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left( 8 + \frac{4}{n^4} \right)}{n^3 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( 8 + \frac{4}{n^4} \right)}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{3n+1} \times \frac{1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left( 3 + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{n^2 + 1} \times (n+2) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left( 1 + \frac{2}{n} \right)}{n^2 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

85.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n^2+2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}(\sqrt{n+2})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n} \sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2}) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1 - n^2-2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2+4n+2n}}{n+3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 \left( 9 + \frac{4}{n} \right) + 2n}}{n+3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2} \sqrt{9 + \frac{4}{n} + 2}}{n+3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{9 + \frac{4}{n} + 2}}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( \sqrt{9 + \frac{4}{n} + 2} \right)}{n \left( 1 + \frac{3}{n} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{4}{n} + 2}}{1 + \frac{3}{n}} = \frac{3+2}{1} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + \sqrt{n+2}} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - \sqrt{n+2})}{(1 + \sqrt{n+2})(1 - \sqrt{n+2})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - \sqrt{n+2})}{1 - n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - \sqrt{n+2})}{-n - 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - \sqrt{n+2})}{n \left( -1 - \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{n+2}}{-1 - \frac{1}{n}} = \\ &= \frac{-\infty}{-1} = +\infty \end{aligned}$$

86.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} \right)^n = 0$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{3} \right)^n = +\infty$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{7} \right)^n = 0$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - 9^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 9^n \left( \left( \frac{2}{9} \right)^n - 1 \right) \right) = +\infty \times (-1) = -\infty$$

87. A sequência 0,9; 0,09; 0,009; ... é uma progressão geométrica de razão 0,1. Assim:

$$\begin{aligned} 0,9 &= 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 0,9 \times \frac{1 - 0,1^n}{1 - 0,1} \right) = 0,9 \times \frac{1 - 0}{0,9} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{88. } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (10 + 1 + 0,1 + 0,01 + \dots + 0,1^n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 10 \times \frac{1 - 0,1^n}{1 - 0,1} \right) = 10 \times \frac{1 - 0}{0,9} = \\ &= 10 \times \frac{10}{9} = \frac{100}{9} \end{aligned}$$

## Aprende Fazendo

Páginas 98 a 104

1.  $\lim u_n = \lim \left( 3 + \frac{1}{n} \right) = 3 + 0 = 3$

A opção correta é a (D).

2.  $\lim v_n = \lim \frac{n-5}{n} = \lim \left( 1 - \frac{5}{n} \right) = 1 - 0 = 1$

Logo,  $(v_n)$  é uma sucessão convergente.

A opção correta é a (C).

3. Como o gráfico da sucessão  $(w_n)$  está sobre uma reta de declive positivo, então  $w_n \rightarrow +\infty$ .

A opção correta é a (B).

4.  $\lim t_n = \lim (100 - n)^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

Logo,  $(t_n)$  é uma sucessão divergente.

A opção correta é a (A).

5.  $\lim u_n = \lim \left( 2 - \frac{1}{n} \right) = 2 - 0 = 2$

Logo,  $(u_n)$  é uma sucessão convergente para 2.

A opção correta é a (C).

6. A afirmação (A) é falsa. Contraexemplo: a sucessão de termo geral  $a_n = (-1)^n$  é limitada mas não é convergente.

A afirmação (B) é falsa. Contraexemplo: a sucessão de termo geral  $b_n = n$  é monótona mas não é convergente.

A afirmação (C) é falsa. Contraexemplo: a sucessão de termo geral  $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$  é convergente mas não é monótona.

A afirmação (D) é verdadeira. Se  $(d_n)$  é uma sucessão convergente para  $a$ , então, pela definição de limite, para qualquer  $\delta > 0$ , existe uma ordem  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |d_n - a| < \delta$ . Ora,  $|d_n - a| < \delta \Leftrightarrow -\delta < d_n - a < \delta \Leftrightarrow a - \delta < d_n < a + \delta$ , pelo que  $(d_n)$  é uma sucessão limitada.

A opção correta é a (D).

7.  $\lim (b_n \times c_n)$  conduz a uma indeterminação do tipo  $\infty \times 0$ .

$$\lim (a_n \times b_n) = -1 \times (+\infty) = -\infty$$

$$\lim \left( \frac{c_n}{b_n} \right) = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$\lim \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

A opção correta é a (B).

$$\begin{aligned} 8. \lim u_n &= \lim \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) = \\ &= \lim \left( 1 \times \frac{1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \frac{1 - 0}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

A opção correta é a (A).

9. A proposição (I) é falsa. Contraexemplo: a sucessão de termo geral

$$u_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{1}{2^n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é tal que  $\lim u_n = 0$  e  $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , mas  $(u_n)$  não é monótona.

A proposição (II) é falsa. Contraexemplo: a sucessão de termo geral  $v_n = -n$  é não limitada e  $\lim v_n = -\infty$ .  
A opção correta é a (B).

10. Como a sucessão  $(b_n)$  é decrescente, então  $b_1 \geq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Então,  $-1 < b_n \leq b_1, \forall n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $(b_n)$  é limitada. Uma vez que  $(b_n)$  é monótona e limitada, então  $(b_n)$  é convergente.  
A opção correta é a (D).

11.  $\lim u_n = \lim (n^3 - n) = \lim \left[ n^3 \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] = +\infty \times 1 = +\infty$

Logo, a proposição (I) é verdadeira.

$$\lim v_n = \lim [2n + (-1)^n]$$

Se  $n$  é par, então  $\lim v_n = \lim (2n + 1) = +\infty$ .

Se  $n$  é ímpar, então  $\lim v_n = \lim (2n - 1) = +\infty$ .

Logo,  $\lim v_n = +\infty$  e a proposição (II) é verdadeira.

A opção correta é a (A).

$$\begin{aligned} 12. \lim w_n &= \lim \frac{kn^4 + n^2 - 3n + 4}{-6n^3 + n^2} = \\ &= \lim \frac{n^3 \left( kn + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^3} \right)}{n^3 \left( -6 + \frac{1}{n} \right)} = \\ &= \lim \frac{kn + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^3}}{-6 + \frac{1}{n}} = \lim \frac{kn}{-6} \end{aligned}$$

Como  $\lim w_n = -\infty$ , então  $k > 0$ .

A opção correta é a (D).

$$\begin{aligned} 13. \lim \left( x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \dots + \frac{x}{3^{n-1}} \right) &= 30 \\ \Leftrightarrow \lim \left( x \times \frac{1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \right) &= 30 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \times \frac{1}{\frac{2}{3}} = 30$$

$$\Leftrightarrow x = 30 \times \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 20$$

A opção correta é a (C).

14.

$$\text{a) } \lim \frac{3n+1}{3n-4} = \lim \frac{n \left( 3 + \frac{1}{n} \right)}{n \left( 3 - \frac{4}{n} \right)} = \lim \frac{3 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{4}{n}} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{b) } \lim \frac{-5n+1}{10} = \lim \left( -\frac{n}{2} + \frac{1}{10} \right) = -\infty$$

$$\text{c) } \lim \frac{-n-1}{-4} = \lim \left( \frac{n}{4} + \frac{1}{4} \right) = +\infty$$

$$\text{d) } \lim \left( -\frac{2}{5} \right) = -\frac{2}{5}$$

$$\text{e) } \lim \frac{1}{3n+2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

15.

$$\text{a) } \lim n^4 = +\infty$$

$$\text{b) } \lim \sqrt{n^3} = +\infty$$

$$\text{c) } \lim n^{2018} = +\infty$$

$$\text{d) } \lim n^{-2018} = 0$$

$$\text{e) } \lim \frac{1}{n^3} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{f) } \lim \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{16. } \lim u_n = \lim \frac{n}{2n+1} = \lim \frac{n}{n \left( 2 + \frac{1}{n} \right)} =$$

$$= \lim \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim v_n = \lim n^{-2} = \lim \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim w_n = \lim \frac{12n+1}{2n+5} = \lim \frac{12 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n}} = 6$$

$$\text{a) } \lim (u_n + v_n) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \lim (v_n + w_n) = 0 + 6 = 6$$

$$\text{c) } \lim (3v_n - w_n) = 3 \times 0 - 6 = -6$$

$$\text{d) } \lim (u_n \times v_n) = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

$$\text{e) } \lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{f) } \lim \frac{1}{u_n w_n} = \frac{1}{\frac{1}{2} \times 6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{g) } \lim \frac{v_n}{w_n} = \frac{0}{6} = 0$$

$$\text{h) } \lim (u_n)^2 = \left( \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{i) } \lim (w_n)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

17.

$$\text{a) } \lim (a_n + b_n) = -\infty + (-\infty) = -\infty$$

$$\text{b) } \lim (c_n + d_n) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\text{c) } \lim (a_n + f_n) = -\infty + 3 = -\infty$$

$$\text{d) } \lim (b_n + c_n) = -\infty + (+\infty) \text{ Indeterminação}$$

$$\text{e) } \lim (f_n + c_n) = 3 + (+\infty) = +\infty$$

$$\text{f) } \lim (a_n \times b_n) = -\infty \times (-\infty) = +\infty$$

$$\text{g) } \lim (a_n \times c_n) = -\infty \times (+\infty) = -\infty$$

$$\text{h) } \lim (a_n \times f_n) = -\infty \times 3 = -\infty$$

$$\text{i) } \lim (c_n \times e_n) = -\infty \times 0 \text{ Indeterminação}$$

$$\text{j) } \lim (a_n \times d_n) = -\infty \times 0 \text{ Indeterminação}$$

$$\text{k) } \lim (a_n^4) = (-\infty)^4 = +\infty$$

$$\text{l) } \lim (a_n^5) = (-\infty)^5 = -\infty$$

$$\text{m) } \lim \left( \frac{1}{c_n} \right) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{n) } \lim \left( \frac{1}{b_n} \right) = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\text{o) } \lim \left( \frac{a_n}{c_n} \right) = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ Indeterminação}$$

$$\text{p) } \lim \left( \frac{e_n}{f_n} \right) = \frac{0}{3} = 0$$

$$\text{q) } \lim \left( \frac{d_n}{e_n} \right) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminação}$$

$$\text{r) } \lim \left( \frac{f_n}{e_n} \right) = \frac{3}{0} \text{ Não há dados suficientes para resolver o exercício.}$$

18.

$$\text{a) } \lim 4^n = +\infty$$

$$\text{b) } \lim \frac{5^n}{2^n} = \lim \left( \frac{5}{2} \right)^n = +\infty$$

$$\text{c) } \lim \frac{7^n}{\pi^{n+1}} = \lim \left( \frac{7}{\pi} \right)^n \times \frac{1}{\pi} = +\infty \times \frac{1}{\pi} = +\infty$$

$$d) \lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

$$e) \lim \frac{2^n}{10^n} = \lim \left(\frac{2}{10}\right)^n = 0$$

$$f) \lim (3^n - 6^n) = \lim \left(6^n \left(\left(\frac{3}{6}\right)^n - 1\right)\right) = +\infty (0 - 1) = -\infty$$

19.

a) Pretende-se provar que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left|\frac{2}{n} - 0\right| < \delta$ .

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

$$\left|\frac{2}{n} - 0\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{2}{n}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{2}{n} < \delta \Leftrightarrow \frac{n}{2} > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow n > \frac{2}{\delta}$$

Assim, se  $n > \frac{2}{\delta}$ , então  $\left|\frac{2}{n} - 0\right| < \delta$ , e, portanto, se

$p > \frac{2}{\delta}$ , fica provado que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N},$

$$n \geq p \Rightarrow \left|\frac{2}{n} - 0\right| < \delta, \text{ ou seja, que } \lim \frac{2}{n} = 0.$$

b) Pretende-se provar que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left|\frac{10n}{2n+1} - 5\right| < \delta$ .

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

$$\left|\frac{10n}{2n+1} - 5\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{10n - 10n - 5}{2n+1}\right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2n+1} < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+1}{5} > \frac{1}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow 2n+1 > \frac{5}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow 2n > \frac{5}{\delta} - 1$$

$$\Leftrightarrow 2n > \frac{5-\delta}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{5-\delta}{2\delta}$$

Assim, se  $n > \frac{5-\delta}{2\delta}$ , então  $\left|\frac{10n}{2n+1} - 5\right| < \delta$ , e, por-

tanto, se  $p > \frac{5-\delta}{2\delta}$ , fica provado que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$

$$\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left|\frac{10n}{2n+1} - 5\right| < \delta, \text{ ou seja,}$$

$$\text{que } \lim \frac{10n}{2n+1} = 5.$$

c) Pretende-se provar que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left|\frac{n^2}{3n^2+1} - \frac{1}{3}\right| < \delta$ .

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

$$\left|\frac{n^2}{3n^2+1} - \frac{1}{3}\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{3n^2 - 3n^2 - 1}{3(3n^2+1)}\right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3(3n^2+1)} < \delta$$

$$\Leftrightarrow 3(3n^2+1) > \frac{1}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow 3n^2+1 > \frac{1}{3\delta}$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 > \frac{1}{3\delta} - 1$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 > \frac{1-3\delta}{3\delta}$$

$$\Leftrightarrow n^2 > \frac{1-3\delta}{9\delta}$$

Assim, se  $n > \sqrt{\frac{1-3\delta}{9\delta}}$ , então  $\left|\frac{n^2}{3n^2+1} - \frac{1}{3}\right| < \delta$  e,

portanto, se  $p > \sqrt{\frac{1-3\delta}{9\delta}}$ , fica provado que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left|\frac{n^2}{3n^2+1} - \frac{1}{3}\right| < \delta,$$

$$\text{ou seja, que } \lim \frac{n^2}{3n^2+1} = \frac{1}{3}.$$

20.

a) Dado  $L \in \mathbb{R}^+$ .

$$2n+5 > L \Leftrightarrow 2n > L-5 \Leftrightarrow n > \frac{L-5}{2}$$

Então, para qualquer  $L > 0$ , se considerarmos um número natural  $p$ , superior a  $\frac{L-5}{2}$ , tem-se

$$2n+5 > L, \text{ desde que } n \geq p.$$

Fica provado que  $\lim (2n+5) = +\infty$ .

b) Dado  $L \in \mathbb{R}^+$ .

$$\frac{3-n}{2} < -L \Leftrightarrow 3-n < -2L$$

$$\Leftrightarrow -n < -2L-3$$

$$\Leftrightarrow n > 2L+3$$

Então, para qualquer  $L > 0$ , se considerarmos um número natural  $p$ , superior a  $2L+3$ , tem-se

$$\frac{3-n}{2} < -L, \text{ desde que } n \geq p.$$

$$\text{Fica provado que } \lim \left(\frac{3-n}{2}\right) = -\infty.$$

21.

a) Proposição verdadeira.

Por exemplo, a sucessão de termo geral  $u_n = (-1)^n$  é limitada, mas não tem limite.

b) Proposição falsa.

Uma sucessão limitada é minorada e majorada, logo não pode tender para infinito.

**c)** Proposição verdadeira.

Por exemplo, a sucessão de termo geral  $u_n = \frac{1}{n}$  é limitada e tende para zero.

**d)** Proposição falsa.

Por exemplo, a sucessão de termo geral  $u_n = -n + 3$  tem termos positivos (nomeadamente o primeiro e o segundo termos) e tende para  $-\infty$ .

**e)** Proposição falsa.

Por exemplo, a sucessão de termo geral  $u_n = -\frac{1}{n}$  é crescente e não tende para  $+\infty$ , mas para zero.

**f)** Proposição falsa.

Por exemplo, a sucessão de termo geral  $u_n = n$  é monótona, mas não é convergente.

**g)** Proposição falsa.

Por exemplo, a sucessão de termo geral  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$  é convergente, mas não é monótona.

**h)** Proposição verdadeira.

**22.**

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+5}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{5}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{2n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{2n^2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3+4n-5}{2n^3-5n^2+1} = \frac{3 + \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3}}{2 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9n+2}{4n-3}} = \sqrt{\frac{9 + \frac{2}{n}}{4 - \frac{3}{n}}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+5}}{2n+1} = \frac{\sqrt{1 + \frac{5}{n^2}}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{\sqrt{2n+1}} = \frac{\sqrt{n} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \right)}{\sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

$$\text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{\sqrt{2n^2+1}+3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{n \sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} + 3n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{\sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} + 3} = \frac{1}{\sqrt{2} + 3} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} + 3} \times \frac{\sqrt{2} - 3}{\sqrt{2} - 3} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 3}{2 - 9} = \frac{3 - \sqrt{2}}{7}$$

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n} \sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n} \left( \sqrt{2 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \right) = +\infty \times (\sqrt{2} - 1) = +\infty$$

$$\text{j) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{5} \right)^n \times 2 = 0 \times 2 = 0$$

$$\text{k) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 3^{n+1}}{\pi^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{\pi} \right)^n \times \frac{1}{\pi^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{\pi} \right)^n \times \frac{3}{\pi^2} =$$

$$= +\infty + 0 = +\infty$$

$$\text{l) } \lim_{n \rightarrow \infty} (3^{n+2} - 5^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 5^n \left( \left( \frac{3}{5} \right)^n \times 9 - 1 \right) \right) =$$

$$= +\infty \times (0 - 1) = -\infty$$

**23.**

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+3}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n + \frac{3}{n} \right) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + \frac{3}{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^5+3n^2}{4n^5+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n^3}}{4 + \frac{1}{n^5}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2+3n^4}{4n+1} \right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} + 3n^3}{4 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{+\infty}{4} = +\infty$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} \cdot (n^2+2) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{n+1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

$$\text{f) } \lim \left( \frac{1}{n^2+3} : \frac{2}{n} \right) \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim \frac{n}{2n^2+6} = \lim \frac{1}{2n+\frac{6}{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{g) } \lim \left( \sqrt{\frac{12n}{n+1}} \right) \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \sqrt{\frac{12}{1+\frac{1}{n}}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{h) } \lim (n^{2017} - n^2) \underset{(\infty - \infty)}{=} \lim \left( n^{2017} \left( 1 - \frac{1}{n^{2015}} \right) \right) = +\infty \times 1 = +\infty$$

$$\text{i) } \lim (n^2 - n^{2016}) \underset{(\infty - \infty)}{=} \lim \left( n^{2016} \left( \frac{1}{n^{2014}} - 1 \right) \right) = +\infty \times (-1) = -\infty$$

$$\text{j) } \lim \left( 2 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

Se  $n$  é par, então  $\lim \left( 2 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \lim \left( 2 + \frac{1}{n} \right) = 2 + 0 = 2$ .

Se  $n$  é ímpar, então  $\lim \left( 2 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \lim \left( 2 - \frac{1}{n} \right) = 2 - 0 = 2$ .

Logo,  $\lim \left( 2 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 2$ .

$$\text{k) } \lim \left( -n + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

Se  $n$  é par, então  $\lim \left( -n + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \lim \left( -n + \frac{1}{n} \right) = -\infty + 0 = -\infty$ .

Se  $n$  é ímpar, então  $\lim \left( -n + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \lim \left( -n - \frac{1}{n} \right) = -\infty - 0 = -\infty$ .

Logo,  $\lim \left( -n + \frac{(-1)^n}{n} \right) = -\infty$ .

$$\text{l) } \lim (\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}) = +\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{m) } \lim (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2}) &\underset{(\infty - \infty)}{=} \\ &= \lim \frac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}} = \\ &= \lim \frac{n^2+1-n^2-2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}} = \\ &= \lim \frac{-1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{n) } \lim \left( \frac{1+2^n+3^n}{3^n} \right) \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \left( \frac{1}{3} \right)^n + \lim \left( \frac{2}{3} \right)^n + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$\text{o) } \lim \left( \frac{-2+4^{n+1}}{2^n} \right) \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{-1}{2^{n-1}} + \lim 2^n \times 4 = 0 + (+\infty) = +\infty$$

$$\text{24. } \lim u_n = \lim (\pi + (-1)^n)$$

Se  $n$  é par, então  $\lim u_n = \pi + 1$ .

Se  $n$  é ímpar, então  $\lim u_n = \pi - 1$ .

Logo, a sucessão  $(u_n)$  é divergente.

$$\lim v_n = \lim (\pi - (-1)^n)$$

Se  $n$  é par, então  $\lim v_n = \pi - 1$ .

Se  $n$  é ímpar, então  $\lim v_n = \pi + 1$ .

Logo, a sucessão  $(v_n)$  é divergente.

$$\begin{aligned} \lim (u_n \times v_n) &= \lim ((\pi + (-1)^n)(\pi - (-1)^n)) = \\ &= \lim (\pi^2 - (-1)^{2n}) = \pi^2 + 1 \end{aligned}$$

Logo, a sucessão  $(u_n \times v_n)$  é convergente.

25.

$$\text{a) } \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que  $\frac{1}{3}$  é uma constante, fica provado que  $(w_n)$  é uma progressão geométrica.

b)  $w_1 = \frac{2}{3} > 0$  e  $r = \frac{1}{3} < 1$ , logo  $(w_n)$  é uma sucessão decrescente.

$$\begin{aligned} \text{c) } S_n &= \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{d) } \lim S_n = \lim \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) = 1 - 0 = 1$$

26.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim S_n &= \lim \left( 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2 \times \frac{1-0}{\frac{1}{2}} = \\ &= 2 \times 2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } u_6 &= u_1 \times r^{6-1} \Leftrightarrow \frac{3}{3125} = 3 \times r^5 \\ &\Leftrightarrow r^5 = \frac{1}{3125} \\ &\Leftrightarrow r = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim S_n &= \lim \left( 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} \right) = 3 \times \frac{1-0}{\frac{4}{5}} = \\ &= 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

27. Pretende-se provar que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N},$

$$n \geq p \Rightarrow \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta.$$

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+.$

$$\left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \\ \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$$

Assim, se  $n > \frac{1}{2\delta}$ , então  $\left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta$ , e, portanto, se  $p > \frac{1}{2\delta}$ , fica provado que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}:$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta, \text{ ou seja, que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0.$$

28. Pretende-se provar que a proposição  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$

$$\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n+1}{n} - 4 \right| < \delta \text{ é falsa.}$$

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+.$

$$\left| \frac{n+1}{n} - 4 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{n+1-4n}{n} \right| < \delta \\ \Leftrightarrow \left| \frac{1-3n}{n} \right| < \delta \\ \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} - 3 \right| < \delta \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} - 3 < \delta \wedge \frac{1}{n} - 3 > -\delta \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} < 3 + \delta \wedge \frac{1}{n} > 3 - \delta \\ \Leftrightarrow n > \frac{1}{3+\delta} \wedge n < \frac{1}{3-\delta}$$

Assim, os únicos termos da sucessão que são valores aproximados de 4 com erro inferior a  $\delta$  são aqueles cuja ordem é superior a  $\frac{1}{3+\delta}$  e inferior a  $\frac{1}{3-\delta}$  e não todos a partir de uma certa ordem.

Logo, a proposição acima é falsa, ou seja, a sucessão  $(u_n)$  não tende para 4.

29.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \cos n}{3n^2 + \sin n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\cos n}{n^2}}{3 + \frac{\sin n}{n^2}} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (3\sqrt{n^2+1} - 5n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3\sqrt{n^2} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 5n \right) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 5n \right) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \left( 3\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 5 \right) \right) = +\infty (3-5) = -\infty$$

$$\text{c) } \text{Seja } v_n = \frac{n^4}{5^n}.$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)^4}{5^{n+1}} - \frac{n^4}{5^n} = \frac{(n+1)^2(n+1)^2}{5^{n+1}} - \frac{n^4}{5^n} = \\ = \frac{(n^2 + 2n + 1) - 5n^4}{5^{n+1}} = \\ = \frac{n^4 + 3n^3 + 4n^2 + 3n + 1 - 5n^4}{5^{n+1}} = \\ = \frac{-4n^4 + 3n^3 + 4n^2 + 3n + 1}{5^{n+1}}$$

Uma vez que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-4n^4 + 3n^3 + 4n^2 + 3n + 1) =$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -4n^4 \left( 1 - \frac{3}{4n} - \frac{1}{n^2} - \frac{3}{4n^3} - \frac{1}{4n^4} \right) \right) = -\infty \times 1 = -\infty,$   
 então, a partir de uma certa ordem  
 $-4n^4 + 3n^3 + 4n^2 + 3n + 1 < 0$ , pelo que, a partir  
 dessa ordem,  $\frac{-4n^4 + 3n^3 + 4n^2 + 3n + 1}{5^{n+1}} < 0$  e a

sucessão  $(v_n)$  é decrescente.

Por outro lado,  $\frac{n^4}{5^n} > 0$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , pelo que a sucessão  $(v_n)$  é minorada.

Assim,  $0 < v_n \leq v_1, \forall n \in \mathbb{N}$ , ou seja  $(v_n)$  é uma sucessão limitada.

Ora,  $u_n = v_n \times \frac{1}{n}$ , logo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( v_n \times \frac{1}{n} \right) = 0$ , já que  $(v_n)$  é uma sucessão limitada e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

30.

a) Para todo o  $n \in \mathbb{N}$ :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{1}{2} \left( u_n + \frac{1}{u_n} \right) - 1}{\frac{1}{2} \left( u_n + \frac{1}{u_n} \right) + 1} = \\ = \frac{\frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2u_n} - 1}{\frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2u_n} + 1} = \frac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{u_n^2 + 1 + 2u_n} = \\ = \frac{(u_n - 1)^2}{(u_n + 1)^2} = \left( \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \right)^2 = v_n^2, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

$$\text{b) } \text{Seja } P(n): v_n = \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}}$$

$$v_1 = \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{1-1}} \Leftrightarrow \frac{u_1 - 1}{u_1 + 1} = \left( \frac{1}{3} \right)^{2^0} \Leftrightarrow \frac{2-1}{2+1} = \left( \frac{1}{3} \right)^1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

$$\text{Hipótese: } v_n = \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}}$$

$$\text{Tese: } v_{n+1} = \left( \frac{1}{3} \right)^{2^n}$$

**Demonstração:**

$$v_{n+1} = v_n^2 = \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} \right]^2 = \left( \frac{1}{3} \right)^{2 \times 2^{n-1}} = \left( \frac{1}{3} \right)^{2^n}$$

$$\text{Logo, } v_n = \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } v_n &= \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \Leftrightarrow \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \\ &\Leftrightarrow (u_n + 1) \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} = u_n - 1 \\ &\Leftrightarrow u_n \times \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} + \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} = u_n - 1 \\ &\Leftrightarrow u_n \times \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} - u_n = -1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} \\ &\Leftrightarrow u_n \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} \right) = 1 + \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}}}{1 + \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}}} \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{1 - \frac{1}{3^{2^{n-1}}}}{1 + \frac{1}{3^{2^{n-1}}}} \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{3^{2^{n-1}} - 1}{3^{2^{n-1}} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \lim u_n = \lim \frac{1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}}}{1 + \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

$$\lim v_n = \lim \left( \frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} = 0$$

**Tema IV - Funções Reais de Variável Real****Unidade 1 - Funções racionais****Páginas 6 a 15****1.**

$$\text{a) } D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\text{b) } D_g = \{x \in \mathbb{R}: 2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\text{c) } D_h = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

$$\text{d) } D_i = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 5 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

Condição universal em  $\mathbb{R}$

$$\text{e) } D_j = \{x \in \mathbb{R}: x^3 + 5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{-5}\}$$

$$\text{f) } D_k = \{x \in \mathbb{R}: -x^2 + 5x - 6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$

**Cálculo auxiliar**

$$\begin{aligned} -x^2 + 5x - 6 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{-2} \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3 \end{aligned}$$

**2.**

$$\text{a) } D = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{2x^2 - 18}{2x + 6} &= \frac{2(x^2 - 9)}{2(x + 3)} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = x - 3, \\ &\text{em } \mathbb{R} \setminus \{-3\} \end{aligned}$$

$$\text{b) } D = \{x \in \mathbb{R}: 2x^2 + 6x + 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

**Cálculo auxiliar**

$$\begin{aligned} 2x^2 + 6x + 4 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{3x^2 - 6x - 9}{2x^2 + 6x + 4} &= \frac{3(x^2 - 2x - 3)}{2(x^2 + 3x + 2)} = \\ &= \frac{3(x + 1)(x - 3)}{2(x + 2)(x + 1)} = \\ &= \frac{3(x - 3)}{2(x + 2)} = \\ &= \frac{3x - 9}{2x + 4}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\} \end{aligned}$$

**Cálculo auxiliar**

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \end{aligned}$$

$$\text{c) } D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} &= \frac{(x - 1)(x^2 - 2x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \end{aligned}$$

**Cálculo auxiliar**

	1	-3	3	-1
1		1	-2	1
	1	-2	1	0

$$\text{d) } D = \{x \in \mathbb{R}: x^6 + 5x^5 + 7x^4 + 3x^3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0\}$$

**Cálculos auxiliares**

$$\begin{aligned} \cdot x^6 + 5x^5 + 7x^4 + 3x^3 = 0 &\Leftrightarrow x^3(x^3 + 5x^2 + 7x + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = -3 \end{aligned}$$

Divisores de 3: -3, -1, 1, 3

	1	5	7	3
-1		-1	-4	-3
	1	4	3	0

$$\begin{aligned} \cdot x^2 + 4x + 3 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cdot \frac{x^4 + 4x^3 + 3x^2}{x^6 + 5x^5 + 7x^4 + 3x^3} &= \frac{x^2(x^2 + 4x + 3)}{x^3(x+1)(x^2 + 4x + 3)} = \\ &= \frac{1}{x(x+1)} = \\ &= \frac{1}{x^2 + x}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0\} \end{aligned}$$

3.

a)  $D = \{x \in \mathbb{R}: x + h \neq 0 \wedge x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-h, 0\}$

$$\cdot \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-x-h}{x(x+h)} = \frac{-h}{x^2+xh}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-h, 0\}$$

b)  $D = \{x \in \mathbb{R}: x-3 \neq 0 \wedge x^2-9 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

$$\cdot \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{x+3-2}{x^2-9} = \frac{x+1}{x^2-9}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

c)  $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2-9 \neq 0 \wedge x^2+3x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{6}{x^2-9} + \frac{x}{x^2+3x} &= \frac{6}{(x-3)(x+3)} + \frac{x}{x(x+3)} = \\ &= \frac{6}{(x-3)(x+3)} + \frac{1}{x+3} = \\ &= \frac{6+x-3}{(x-3)(x+3)} = \\ &= \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} = \\ &= \frac{1}{x-3}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\} \end{aligned}$$

d)  $D = \{x \in \mathbb{R}: x-2 \neq 0 \wedge x^2-5x+6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

#### Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{5 \pm 1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{x-1}{x^2-5x+6} &= \frac{1}{x-2} + \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{x-3+x-1}{(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{2x-4}{(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{2(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{2}{x-3}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{2, 3\} \end{aligned}$$

e)  $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2+5x+6 \neq 0 \wedge x^2+4x+3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3\}$

#### Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \cdot x^2 + 5x + 6 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -3 \\ \cdot x^2 + 4x + 3 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{x+1}{x^2+5x+6} + \frac{x+2}{x^2+4x+3} &= \\ &= \frac{x+1}{(x+2)(x+3)} + \frac{x+2}{(x+3)(x+1)} = \\ &= \frac{(x+1)(x+1) + (x+2)(x+2)}{(x+2)(x+3)(x+1)} = \\ &= \frac{x^2+2x+1+x^2+4x+4}{(x+2)(x+3)(x+1)} = \\ &= \frac{2x^2+6x+5}{(x+2)(x+3)(x+1)}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3\} \end{aligned}$$

4.

a)  $D = \{x \in \mathbb{R}: x+5 \neq 0 \wedge 2x^3-2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-5, 0, -1, 1\}$

#### Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} 2x^3 - 2x = 0 &\Leftrightarrow 2x(x^2-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{2x}{x+5} \times \frac{x+5}{2x^3-2x} &= \frac{2x(x+5)}{(x+5)2x(x^2-1)} = \\ &= \frac{1}{x^2-1}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-5, 0, -1, 1\} \end{aligned}$$

b)  $D = \{x \in \mathbb{R}: x+3 \neq 0 \wedge x^2-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\}$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{x^2-x-2}{x+3} \times \frac{x^2+6x+9}{x^2-1} &= \frac{(x-2)(x+1)(x+3)^2}{(x+3)(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{(x-2)(x+3)}{x-1} = \\ &= \frac{x^2+x-6}{x-1}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\} \end{aligned}$$

#### Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$\text{c) } D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x - 6 \neq 0 \wedge 2x^2 + 12x \neq 0\} = \\ = \mathbb{R} \setminus \{-6, -1, 0, 6\}$$

#### Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \bullet x^2 - 5x - 6 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 7}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 6 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet 2x^2 + 12x = 0 &\Leftrightarrow 2x(x + 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{x^2 - 36}{x^2 - 5x - 6} \times \frac{x^4 - 1}{2x^2 + 12x} &= \\ &= \frac{(x - 6)(x + 6)(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{(x - 6)(x + 1) 2x(x + 6)} = \\ &= \frac{(x - 1)(x^2 + 1)}{2x} = \\ &= \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{2x}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-6, -1, 0, 6\} \end{aligned}$$

#### 5.

$$\text{a) } D = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0 \wedge 4 - x^2 \neq 0 \wedge x^2 - 9 \neq 0\} = \\ = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2, 3\}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{x^2 + 3x}{x - 2} : \frac{x^2 - 9}{4 - x^2} &= \frac{x^2 + 3x}{x - 2} \times \frac{4 - x^2}{x^2 - 9} = \\ &= \frac{x(x + 3)(2 - x)(2 + x)}{(x - 2)(x - 3)(x + 3)} = \\ &= \frac{-x(2 + x)}{x - 3} = \\ &= \frac{-x^2 - 2x}{x - 3}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2, 3\} \end{aligned}$$

$$\text{b) } D = \{x \in \mathbb{R} : x^4 \neq 0 \wedge 5x \neq 0 \wedge x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\frac{x^4 - 1}{x^4}}{\frac{x^2 + 1}{5x}} &= \frac{(x^4 - 1) 5x}{x^4(x^2 + 1)} = \\ &= \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) 5}{x^3(x^2 + 1)} = \\ &= \frac{5(x - 1)(x + 1)}{x^3} = \\ &= \frac{5x^2 - 5}{x^3}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

$$\text{c) } D = \left\{x \in \mathbb{R} : x - 5 \neq 0 \wedge x + 5 \neq 0 \wedge \frac{x}{x - 5} - \frac{5}{x + 5} \neq 0\right\} = \\ = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$$

#### Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} \frac{x}{x - 5} - \frac{5}{x + 5} = 0 &\Leftrightarrow \frac{x(x + 5) - 5(x - 5)}{(x - 5)(x + 5)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x - 5x + 25}{(x - 5)(x + 5)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 25}{(x - 5)(x + 5)} = 0, \text{ que é uma equação} \\ &\text{impossível em } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \left(\frac{x}{x - 5} + \frac{5}{x + 5}\right) : \left(\frac{x}{x - 5} - \frac{5}{x + 5}\right) &= \\ &= \frac{x(x + 5) + 5(x - 5)}{(x - 5)(x + 5)} : \frac{x(x + 5) - 5(x - 5)}{(x - 5)(x + 5)} = \\ &= \frac{x^2 + 5x + 5x - 25}{(x - 5)(x + 5)} : \frac{x^2 + 5x - 5x + 25}{(x - 5)(x + 5)} = \\ &= \frac{x^2 + 10x - 25}{(x - 5)(x + 5)} : \frac{x^2 + 25}{(x - 5)(x + 5)} = \\ &= \frac{x^2 + 10x - 25}{(x - 5)(x + 5)} \times \frac{(x - 5)(x + 5)}{x^2 + 25} = \\ &= \frac{x^2 + 10x - 25}{x^2 + 25}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\} \end{aligned}$$

#### 6.

$$\text{a) } \frac{1}{x + 2} - \frac{4}{3} + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x - 4x(x + 2) + 3(x + 2)}{3x(x + 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x - 4x^2 - 8x + 3x + 6}{3x(x + 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x^2 - 2x + 6}{3x(x + 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x^2 - 2x + 6 = 0 \wedge 3x(x + 2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{4} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{3}{2} \vee x = 1\right) \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = 1$$

$$\text{C.S.} = \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$$

$$\text{b) } \frac{x^2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} = \frac{6 - 5x}{4 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} - \frac{6 - 5x}{4 - x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{(x - 2)(x + 2)} - \frac{1}{x - 2} + \frac{6 - 5x}{(x - 2)(x + 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2 + 6 - 5x}{(x - 2)(x + 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-6x+4}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+4=0 \wedge (x-2)(x+2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{2} \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow (x=3+\sqrt{5} \vee x=3-\sqrt{5}) \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow x=3+\sqrt{5} \vee x=3-\sqrt{5}$$

$$\text{C.S.} = \{3-\sqrt{5}, 3+\sqrt{5}\}$$

c)  $\frac{x-2}{2x^2-x-1} = \frac{x+1}{2x^2+3x+1} - \frac{1}{2x+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{(2x+1)(x-1)} - \frac{x+1}{(2x+1)(x+1)} + \frac{1}{2x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1) - (x+1)(x-1) + (x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)(x+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{(2x+1)(x-1)(x+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \wedge (2x+1)(x-1)(x+1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x=2 \vee x=-1) \wedge x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x=2$$

$$\text{C.S.} = \{2\}$$

#### Cálculos auxiliares

$$\bullet 2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 1$$

$$\bullet 2x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = -1$$

d)  $-\frac{3}{-x^2+x+2} - 1 = \frac{1}{x-2}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{(x+1)(x-2)} - 1 - \frac{1}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - (x+1)(x-2) - (x+1)}{(x+1)(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-x^2+x+2-x-1}{(x+1)(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+4}{(x+1)(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2+4=0 \wedge (x+1)(x-2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x=2 \vee x=-2) \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x=-2$$

$$\text{C.S.} = \{-2\}$$

#### Cálculo auxiliar

$$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$$

7.

a)  $\frac{x-3}{x^2-1} > 0$

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
x-3	-	-	-	-	-	0	+
$x^2-1$	+	0	-	0	+	+	+
$\frac{x-3}{x^2-1}$	-	n.d.	+	n.d.	-	0	+

$$\text{C.S.} = ]-1, 1[ \cup ]3, +\infty[$$

b)  $\frac{x^2-3x+2}{x+2} \leq 0$

#### Cálculo auxiliar

$$x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=2 \vee x=1$$

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
$x^2-3x+2$	+	+	+	0	-	0	+
x+2	-	0	+	+	+	+	+
$\frac{x^2-3x+2}{x+2}$	-	n.d.	+	0	-	0	+

$$\text{C.S.} = ]-\infty, -2[ \cup [1, 2]$$

c)  $\frac{3-x^2}{x-2} \leq -x-3 \Leftrightarrow \frac{3-x^2}{x-2} + x + 3 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3-x^2+x^2-2x+3x-6}{x-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2} \leq 0$$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
x-3	-	-	-	0	+
x-2	-	0	+	+	+
$\frac{x-3}{x-2}$	+	n.d.	-	0	+

$$\text{C.S.} = ]2, 3]$$

d)  $\frac{x^2+3x}{x-4} > x-3 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x}{x-4} - x + 3 > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3x-x^2+4x+3x-12}{x-4} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{10x-12}{x-4} > 0$$

$x$	$-\infty$	$\frac{6}{5}$		4	$+\infty$
$10x-12$	-	-	-	0	+
$x-4$	-	0	+	+	+
$\frac{10x-12}{x-4}$	+	n.d.	-	0	+

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{6}{5} \right[ \cup ] 4, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{1}{x-x^2} &> -\frac{1}{3} - \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x(1-x)} + \frac{1}{3} + \frac{1}{x-1} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3+x(x-1)+3x}{3x(x-1)} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3+x^2-x+3x}{3x(x-1)} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-3}{3x(x-1)} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-1)}{3x(x-1)} > 0 \end{aligned}$$

#### Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} x^2+2x-3=0 &\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	-3		0		1	$+\infty$
$(x+3)(x-1)$	+	0	-	-	-	0	+
$3x(x-1)$	+	+	+	0	-	0	+
$\frac{(x+3)(x-1)}{3x(x-1)}$	+	0	-	n.d.	+	n.d.	+

$$\text{C.S.} = ]-\infty, -3[ \cup ] 0, 1[ \cup ] 1, +\infty[$$

8.

$$\begin{aligned} \text{a) } h(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x^2-3x} - \frac{3}{5x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x(x-3)} - \frac{3}{5x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{20x+25-3(x-3)}{5x(x-3)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{17x+34}{5x(x-3)} = 0 \\ &\Leftrightarrow 17x+34=0 \wedge 5x(x-3) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x=-2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 3 \\ &\Leftrightarrow x=-2 \end{aligned}$$

O zero de  $h$  é -2.

$x$	$-\infty$	-2		0		3	$+\infty$
$17x+34$	-	0	+	+	+	+	+
$5x(x-3)$	+	+	+	0	-	0	+
$\frac{17x+34}{5x(x-3)}$	-	0	+	n.d.	-	n.d.	+

$h$  é positiva em  $]-2, 0[ \cup ] 3, +\infty[$ .

$h$  é negativa em  $]-\infty, -2[ \cup ] 0, 3[$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } j(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{3x-6}{10-2x} \times \frac{x^2-5x}{4-x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3(x-2) \times x(x-5)}{-2(x-5) \times (2-x)(2+x)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 3(x-2)x(x-5) = 0 \wedge -2(x-5) \times (2-x)(2+x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (x=2 \vee x=0 \vee x=5) \wedge x \neq 5 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2 \\ &\Leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

O zero de  $j$  é 0.

$$\begin{aligned} j(x) &= \frac{3x-6}{10-2x} \times \frac{x^2-5x}{4-x^2} = \\ &= \frac{3(x-2) \times x(x-5)}{-2(x-5) \times (2-x)(2+x)} = \\ &= \frac{3x(x-2)(x-5)}{2(x-5)(x-2)(x+2)} \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	-2		0		2		5	$+\infty$
$(x-2)(x-5)$	+	+	+	+	+	0	-	0	+
$3x$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$2(x+2)$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$3x(x-2)(x-5)$	-	-	-	0	+	0	-	0	+
$2(x-5)(x-2)(x+2)$	-	0	+	+	+	0	-	0	+
$\frac{3x(x-2)(x-5)}{2(x-5)(x-2)(x+2)}$	+	n.d.	-	0	+	n.d.	+	n.d.	+

$j$  é positiva em  $]-\infty, -2[ \cup ] 0, 2[ \cup ] 2, 5[ \cup ] 5, +\infty[$ .

$j$  é negativa em  $]-2, 0[$ .

$$\begin{aligned} \text{c) } p(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^3+x^2-9x-9}{x^2-4x+3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3)(x+3)}{(x-1)(x-3)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x+3) = 0 \wedge (x-1)(x-3) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (x=-1 \vee x=3 \vee x=-3) \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 3 \\ &\Leftrightarrow x=-1 \vee x=-3 \end{aligned}$$

Os zeros de  $p$  são -1 e -3.

#### Cálculo auxiliar

	1	1	-9	-9
-1		-1	0	9
	1	0	-9	0

Assim:

$$\begin{aligned} x^3+x^2-9x-9 &= (x+1)(x^2-9) = \\ &= (x+1)(x-3)(x+3) \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$-3$		$-1$		$1$		$3$	$+\infty$
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$(x-3)(x+3)$	+	0	-	-	-	-	-	0	+
$x^3+x^2-9x-9$	-	0	+	0	-	-	-	0	+
$x^2-4x+3$	+	+	+	+	+	0	-	0	+
$\frac{x^3+x^2-9x-9}{x^2-4x+3}$	-	0	+	0	-	n.d.	+	n.d.	+

$p$  é positiva em  $]-3, -1[ \cup ]1, 3[ \cup ]3, +\infty[$ .

$p$  é negativa em  $]-\infty, -3[ \cup ]-1, 1[$ .

$$d) r(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{16x-x^5}{5-x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 16x-x^5 = 0 \wedge 5-x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x(16-x^4) = 0 \wedge x \neq \sqrt{5} \wedge x \neq -\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow x(4-x^2)(4+x^2) = 0 \wedge x \neq \sqrt{5} \wedge x \neq -\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \vee 4-x^2=0 \vee \underbrace{4+x^2=0}) \wedge x \neq \sqrt{5} \wedge x \neq -\sqrt{5}$$

Eq. impossível em  $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=2 \vee x=-2) \wedge x \neq \sqrt{5} \wedge x \neq -\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=2 \vee x=-2$$

Os zeros de  $r$  são 0, 2 e -2.

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		$-2$		$0$		$2$		$\sqrt{5}$	$+\infty$
$x(4+x^2)$	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$4-x^2$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$16x-x^5$	+	+	+	0	-	0	+	0	-	-	-
$5-x^2$	-	0	+	+	+	+	+	+	+	0	-
$\frac{16x-x^5}{5-x^2}$	-	n.d.	+	0	-	0	+	0	-	n.d.	+

$r$  é positiva em  $]-\sqrt{5}, -2[ \cup ]0, 2[ \cup ]\sqrt{5}, +\infty[$ .

$r$  é negativa em  $]-\infty, -\sqrt{5}[ \cup ]-2, 0[ \cup ]2, \sqrt{5}[$ .

## Unidade 2 - Limites segundo Heine de funções reais de variável real

Páginas 16 a 41

9.

a)  $[-1, 5]$

b)  $[0, 4] \cup \left[\sqrt{19}, \frac{9}{2}\right]$

c)  $[-2, 0] \cup \{\sqrt{2}, \pi\}$

10.

a) Seja  $f$  a função real de variável real definida por  $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2}$  e  $(x_n)$  uma sucessão qualquer de termos pertencentes a  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  tal que  $x_n \rightarrow 0$ .

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{(x_n-1)^2} \right) = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n-1)^2} = \\ &= \frac{4}{1} = \\ &= 4 \end{aligned}$$

Conclui-se assim que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{(x-1)^2} = 4$ .

b) Seja  $f$  a função real de variável real definida por  $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2}$  e  $(x_n)$  uma sucessão qualquer de termos pertencentes a  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  tal que  $x_n \rightarrow 1$ .

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{(x_n-1)^2} \right) = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n-1)^2} = \\ &= \frac{4}{0^+} = \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Conclui-se assim que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{(x-1)^2} = +\infty$ .

11.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+1) = 3$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x+5) = 3$

Como  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ , então  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ .

12.

a)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 7 = 7$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2-2) = 7$

c) Como  $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 7$ , então  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 7$ .

13.

a)  $D_h = \{x \in \mathbb{R}: 4-x \geq 0\} = ]-\infty, 4]$

b) Seja  $f$  a função real de variável real definida por  $h(x) = \sqrt{4-x}$  e  $(x_n)$  uma sucessão qualquer de termos pertencentes a  $D_h = ]-\infty, 4]$  tal que  $x_n \rightarrow 4$ .

Então:

$$\begin{aligned}\lim h(x_n) &= \lim \sqrt{4 - x_n} = \\ &= \sqrt{\lim (4 - x_n)} = \\ &= \sqrt{4 - \lim x_n} = \\ &= \sqrt{4 - 4} = \\ &= 0\end{aligned}$$

Conclui-se assim que  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{4 - x} = 0$ .

- 14.** Seja  $f$  a função real de variável real definida por  $f(x) = \frac{4}{x^2 - 1}$  e  $(x_n)$  uma sucessão qualquer de termos pertencentes a  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  tal que  $x_n \rightarrow +\infty$ .

Então:

$$\begin{aligned}\lim f(x_n) &= \lim \frac{4}{x_n^2 - 1} = \\ &= \frac{\lim 4}{\lim (x_n^2 - 1)} = \\ &= \frac{4}{\lim x_n^2 - \lim 1} = \\ &= \frac{4}{(\lim x_n)^2 - 1} = \\ &= \frac{4}{+\infty - 1} = \\ &= \frac{4}{+\infty} = \\ &= 0\end{aligned}$$

Conclui-se assim que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**15.**

- a)** Seja  $f$  a função real de variável real definida por  $f(x) = 2 - \frac{3}{x - 1}$  e  $(x_n)$  uma sucessão qualquer de termos pertencentes a  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  tal que  $x_n \rightarrow 2$ .

Então:

$$\begin{aligned}\lim f(x_n) &= \lim \left( 2 - \frac{3}{x_n - 1} \right) = \\ &= \lim 2 - \lim \frac{3}{x_n - 1} = \\ &= 2 - \frac{\lim 3}{\lim (x_n - 1)} = \\ &= 2 - \frac{3}{\lim x_n - \lim 1} = \\ &= 2 - \frac{3}{2 - 1} = \\ &= 2 - 3 = \\ &= -1\end{aligned}$$

Conclui-se assim que  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( 2 - \frac{3}{x - 1} \right) = -1$ .

- b)** Seja  $f$  a função real de variável real definida por  $f(x) = 2 - \frac{3}{x - 1}$  e  $(x_n)$  uma sucessão qualquer de termos pertencentes a  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  tal que  $x_n \rightarrow +\infty$ .

Então:

$$\begin{aligned}\lim f(x_n) &= \lim \left( 2 - \frac{3}{x_n - 1} \right) = \\ &= \lim 2 - \lim \frac{3}{x_n - 1} = \\ &= 2 - \frac{\lim 3}{\lim (x_n - 1)} = \\ &= 2 - \frac{3}{\lim x_n - \lim 1} = \\ &= 2 - \frac{3}{+\infty - 1} = \\ &= 2 - \frac{3}{+\infty} = \\ &= 2 - 0 = \\ &= 2\end{aligned}$$

Conclui-se assim que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{3}{x - 1} \right) = 2$ .

- c)** Seja  $f$  a função real de variável real definida por  $f(x) = 2 - \frac{3}{x - 1}$  e  $(x_n)$  uma sucessão qualquer de termos pertencentes a  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  tal que  $x_n \rightarrow 1^+$ .

Então:

$$\begin{aligned}\lim f(x_n) &= \lim \left( 2 - \frac{3}{x_n - 1} \right) = \\ &= \lim 2 - \lim \frac{3}{x_n - 1} = \\ &= 2 - \frac{\lim 3}{\lim (x_n - 1)} = \\ &= 2 - \frac{3}{\lim x_n - \lim 1} = \\ &= 2 - \frac{3}{1^+ - 1} = \\ &= 2 - \frac{3}{0^+} = \\ &= 2 - (+\infty) = \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Conclui-se assim que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( 2 - \frac{3}{x - 1} \right) = -\infty$ .

**16.**

- a)**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim \left( -1 - \frac{1}{n^2} \right) = -1 - 0^+ = -1^-$

Logo,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$

A opção correta é a (C).

b) Sabe-se que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = +\infty$ , logo  $\lim v_n = 1^+$ .

Ora:

$$\lim n^2 = +\infty$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1^+$$

$$\lim (-n^2) = -\infty$$

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1^-$$

A opção correta é a (B).

17.

$$a) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{5x-4}{x+1} = \frac{-9}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{5x-4}{x+1} = \frac{-9}{0^-} = +\infty$$

b) Como  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ , então não existe

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

18.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2 \times 3 = -6$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x)} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x))^2 = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right)^2 = (-2)^2 = 4$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 4^+} g(x)} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} f(x)} = \sqrt{0} = 0$$

19.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x^2+1} = \frac{-3}{(+\infty)^2+1} = \frac{-3}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 - \frac{2}{x}\right) = (+\infty)^3 - \frac{2}{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$$

20.

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow -1} (4x^3 + x^2 + 5x - 2) &= \\ &= 4 \times (-1)^3 + (-1)^2 + 5 \times (-1) - 2 = \\ &= -4 + 1 - 5 - 2 = \\ &= -10 \end{aligned}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3) = (-\infty)^2 - 3 = +\infty - 3 = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3}{-2} = \frac{(-\infty)^3 + 3}{-2} = \frac{-\infty}{-2} = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{7-x} = \frac{0}{7-0} = 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 3}{x^4} = \frac{\frac{1}{+\infty} + 3}{(+\infty)^4} = \frac{0 + 3}{+\infty} = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x}{3 - \sqrt{9-x}} = \frac{2 \times 5}{3 - \sqrt{9-5}} = \frac{10}{3-2} = 10$$

21.  $-1 \leq \sin(4x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 2x - 10} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(4x)}{x^2 + 2x - 10} = 0.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 4) = 5$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow -1} g(x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow 5} g(x) = -2.$$

23. Seja  $y = \frac{\pi}{x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\pi}{x}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 2^+} \text{tg}\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \text{tg } y = +\infty.$$

24.

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{4x-12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{4(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-\frac{5}{2}x+1} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-3) = -1$$

$$\begin{aligned} d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{(x-2)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-2}$$

**Limites laterais**

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)^2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)^2}$ , então não existe  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)^2}$ .

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \left[ (x^3 - 1) \times \frac{1}{1-x} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{-(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 - x - 1) = -3$$

25.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2x+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x+1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

26.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - x) = -8 + 2 = -6$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 3x + 1) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^4 \left( 1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^4} \right) \right] = +\infty \times (1 - 0 + 0) = +\infty$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x(x^2 - 1)) =$$

$$= -\infty \times (+\infty) = -\infty$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^4 - 3x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 - x) = 0$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ , então não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

27.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x-9}{4-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8 - \frac{9}{x}}{\frac{4}{x} - 1} = \frac{8}{-1} = -8$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 7x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 5x + 1}{3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^2} - 1} =$$

$$= \frac{-\infty + 0 + 0}{0 - 1} = +\infty$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{+\infty - 0} = 0$$

28.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4x}{x^2 + 1}}{\frac{x^2}{2x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^5 + 4x}{x^4 + x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x + \frac{4}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{3x+1} \times \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x^2 + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{x^2 + 1} \times (x + 2) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1$$

$$\text{29. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x}+\sqrt{3}) =$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

30.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-1}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x \left( 2 + \frac{3}{x} \right)} - \sqrt{x \left( 1 - \frac{1}{x} \right)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x} \sqrt{2 + \frac{3}{x}} - \sqrt{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x} \left( \sqrt{2 + \frac{3}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right) \right] =$$

$$= +\infty(\sqrt{2} - 1) = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-1}}{3x+2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x \left( 2 + \frac{3}{x} \right)} - \sqrt{x \left( 1 - \frac{1}{x} \right)}}{3x+2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{2 + \frac{3}{x}} - \sqrt{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3x+2} =$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left( \sqrt{2 + \frac{3}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)}{\sqrt{x} \left( 3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{3}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{+\infty + 0} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{2}{x^2} \right)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( 2 - \frac{1}{x} \right)}{x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} = \frac{2-0}{1} = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{2}{x^2} \right)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left( 2 - \frac{1}{x} \right)}{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( - \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} \right) = - \frac{2-0}{1} = -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}} &= \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{2}{x^2} \right)} + \sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( 2 - \frac{1}{x} \right)}{x \left( \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)} =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{2-0}{1+1} = 1$$

$$\begin{aligned}
\text{f) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-9} \times \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x^2-9) \sqrt{x-3}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3) \sqrt{x-3}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3) \sqrt{x-3}} = \frac{1}{6 \times 0^+} = +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-5}{\sqrt{x^2-1}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{5x-5}{\sqrt{x^2-1}} \times \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x-5) \sqrt{x^2-1}}{x^2-1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1) \sqrt{x^2-1}}{(x-1)(x+1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \frac{5 \times 0}{2} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x}{\sqrt{3x+2} - \sqrt{x+2}} &= \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2+3x}{\sqrt{3x+2} - \sqrt{x+2}} \times \frac{\sqrt{3x+2} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{x+2}} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+3x)(\sqrt{3x+2} + \sqrt{x+2})}{3x+2-x-2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+3)(\sqrt{3x+2} + \sqrt{x+2})}{2x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)(\sqrt{3x+2} + \sqrt{x+2})}{2} = \\
&= \frac{3 \times (\sqrt{2} + \sqrt{2})}{2} = 3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x}{x-\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2-2x}{x-\sqrt{x}} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-2x)(x+\sqrt{x})}{x^2-x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)(x+\sqrt{x})}{x(x-1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)(x+\sqrt{x})}{x-1} = \\
&= \frac{-2 \times 0}{-1} = 0
\end{aligned}$$

31.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{2-x}$$

### Limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{2-x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+2}{2-x} = 1$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{2-x} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{2-x}$ , então não existe

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{2-x}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+|x|}{x}$$

### Limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4+|x|}{x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4+|x|}{x} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4+|x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4+|x|}{x}$ , então não existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+|x|}{x}.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2-10x}{x} + \frac{\sqrt{x^2}}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x(x-10)}{x} + \frac{|x|}{|x|} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (x-10+1) = 0-9 = -9$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|-3}{9-x^2} = \frac{0-3}{9-0} = -\frac{1}{3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x|-3}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(3-x)(3+x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{3+x} = -\frac{1}{6}$$

32.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|5x-2x^2|}{5x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x+2x^2}{5x+3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-5+2x)x}{\left(5+\frac{3}{x}\right)x} =$$

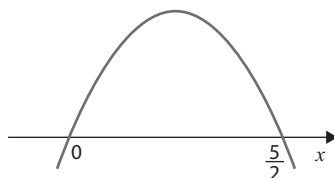
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5+2x}{5+\frac{3}{x}} = \frac{-5+\infty}{5+0} = +\infty$$

### Cálculos auxiliares

$$\bullet |5x-2x^2| = \begin{cases} 5x-2x^2 & \text{se } 5x-2x^2 \geq 0 \\ -5x+2x^2 & \text{se } 5x-2x^2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5x-2x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{5}{2} \\ -5x+2x^2 & \text{se } x < 0 \vee x > \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\bullet 5x-2x^2=0 \Leftrightarrow x(5-2x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{5}{2}$$



$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|2x-1|}{\sqrt{2x^2-5x+2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|2x-1|}{\sqrt{(2x-1)(x-2)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|2x-1|}{|2x-1| \sqrt{\frac{x-2}{2x-1}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{x-2}{2x-1}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2x-1}{x-2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0}{-\frac{3}{2}}} = 0$$

33.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+2} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-64}{(x-4)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-64}{x^2-8x+16} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-\frac{64}{x^2}}{1-\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{(x-4)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2+4x+16}{x-4} = \frac{48}{0^-} = -\infty$$

### Cálculo auxiliar

	1	0	0	-64
4		4	16	64
	1	4	16	0

Logo,  $x^3-64 = (x-4)(x^2+4x+16)$ .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \left( \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ , então não existe  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ .

## Unidade 3 - Continuidade de funções

Páginas 42 a 47

34.

a)  $a \notin D_f$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , logo a função  $f$  tem limite quando  $x \rightarrow a$ .

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b = g(a)$ , logo a função  $g$  tem limite quando  $x \rightarrow a$ .

$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \neq h(a)$ , logo a função  $h$  não tem limite quando  $x \rightarrow a$ .

$\lim_{x \rightarrow a^-} i(x) = b \neq c = \lim_{x \rightarrow a^+} i(x)$ , logo a função  $i$  não tem limite quando  $x \rightarrow a$ .

$\lim_{x \rightarrow a} j(x) = b = j(a)$ , logo a função  $j$  tem limite quando  $x \rightarrow a$ .

$\lim_{x \rightarrow a^-} k(x) = +\infty \neq b = \lim_{x \rightarrow a^+} k(x)$ , logo a função  $k$  não tem limite quando  $x \rightarrow a$ .

b)  $a \notin D_f$ , logo não faz sentido falar de continuidade de  $f$  em  $a$ .

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b = g(a)$ , logo a função  $g$  é contínua em  $a$ .

A função  $h$  não tem limite quando  $x \rightarrow a$ , logo não é contínua em  $a$ .

A função  $i$  não tem limite quando  $x \rightarrow a$ , logo não é contínua em  $a$ .

$\lim_{x \rightarrow a} j(x) = b = j(a)$ , logo a função  $j$  é contínua em  $a$ .

A função  $k$  não tem limite quando  $x \rightarrow a$ , logo não é contínua em  $a$ .

35. Para que  $f$  seja contínua em  $x = 1$  terá que se verificar  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ .

$$f(1) = 5k$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x)}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (-x-1) = -2\end{aligned}$$

$$\text{Assim, } 5k = -2 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{5}.$$

36.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (4-x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-2) = 1$$

$$f(3) = 1$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 1$ , então  $f$  é contínua em  $x = 3$ .

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 3) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{4}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$ , então  $g$  não tem limite quando  $x \rightarrow -1$ , logo  $g$  não é contínua em  $x = -1$ .

37.

$$\begin{aligned}\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-5)}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-5) = -4\end{aligned}$$

$$f(1) = -4$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -4$ , então  $f$  é contínua em  $x = 1$ .

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ , então não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ , logo  $g$  não é contínua em  $x = 0$ .

$$\begin{aligned}\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{3 - \sqrt{2x+5}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{x^3 - 8}{3 - \sqrt{2x+5}} \times \frac{3 + \sqrt{2x+5}}{3 + \sqrt{2x+5}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{9 - 2x - 5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{4 - 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{-2(x-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2x + 4}{-2} = -6\end{aligned}$$

**Cálculo auxiliar**

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	0

Logo,  $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} |x-3| = 1$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x)$ , então não existe

$\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ , logo  $h$  não é contínua em  $x = 2$ .

38.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ , então não existe

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , logo  $f$  não é contínua em  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$g(0) = -1$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq g(0)$ , então  $g$  não é contínua em  $x = 0$ .

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \times x \right) = 1$$

$$(f \times g)(0) = -1 \times (-1) = 1$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} (f \times g)(x) = (f \times g)(0) = 1$ , então  $f \times g$  é contínua em  $x = 0$ .

39. Por exemplo,  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  é uma função racional contínua em  $\mathbb{R}$ .

40.

a) No intervalo  $]1, +\infty[$  a função é contínua, por se tratar de uma função polinomial.

No intervalo  $]-\infty, 1[$  a função é contínua, por se tratar de uma função afim.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2x - 3) = 1 + 2 - 3 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x + 2) = -2 + 2 = 0$$

$$f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 0$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 0$ , então  $f$  é contínua em  $x = 1$ .

Logo,  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .

b) No intervalo  $]-\infty, 0[$  a função é contínua, por se tratar do quociente de duas funções contínuas: uma que é a composta da função raiz quadrada com uma função polinomial e outra que é uma função afim, que não se anula no intervalo considerado.

No intervalo  $]0, +\infty[$  a função é contínua, por se tratar do quociente de duas funções contínuas, ambas polinomiais, cujo denominador não se anula no intervalo considerado.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{x(x^2 + 3x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x^2 + 3x + 1} = 1$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ , então não existe

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ , logo  $g$  não é contínua em  $x = 0$ .

Logo,  $g$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

41. Nos intervalos  $]-\infty, 0[$  e  $]0, +\infty[$  a função é contínua, por se tratar do produto de duas funções contínuas: uma que é uma função trigonométrica e outra que é a composta de uma função trigonométrica com uma função racional.

$$f(0) = 0$$

Uma vez que  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x) = 0$  e que  $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ então } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \sin x \sin \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sin x \sin \frac{1}{x} \right) = f(0) = 0$ , então  $f$  é contínua em  $x = 0$ .

Logo,  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .

42. No intervalo  $]-\infty, 2[$  a função  $h$  é contínua, por se tratar de uma função quadrática.

No intervalo  $]5, +\infty[$  a função  $h$  é contínua, por se tratar de uma função constante.

Uma extensão de  $h$  a  $\mathbb{R}$  que seja contínua pode ser, por exemplo, da forma:

$$h_1(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \leq 2 \\ mx + b & \text{se } 2 < x < 5 \\ 10 & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

Assim,  $\lim_{x \rightarrow 2} h_1(x) = h_1(2) = -1$  e  $\lim_{x \rightarrow 5} h_1(x) = h_1(5) = 10$ .

Logo, os pontos  $A(2, -1)$  e  $B(5, 10)$  têm de pertencer ao gráfico de  $y = mx + b$ .

$$m = \frac{h(5) - h(2)}{5 - 2} = \frac{10 + 1}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\text{Logo, } y = \frac{11}{3}x + b.$$

Como  $A$  pertence à reta:

$$-1 = \frac{11}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -\frac{25}{3}$$

$$\text{Logo, } y = \frac{11}{3}x - \frac{25}{3}.$$

$$\text{Assim, } h_1(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{11}{3}x - \frac{25}{3} & \text{se } 2 < x < 5 \\ 10 & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

43. No intervalo  $]-\infty, 0[$  a função é contínua, por se tratar de uma função constante.

No intervalo  $]0, 4[$  a função é contínua, por se tratar do quociente entre funções contínuas: uma é a

diferença entre a função raiz quadrada e uma função constante, a outra é uma função afim, que não se anula no intervalo considerado.

No intervalo  $]4, +\infty[$  a função é contínua, por se tratar de uma função constante.

Para que  $f$  seja contínua em  $x = 0$  terá que se verificar  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

$$f(0) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{1}{2}$$

Assim,  $a = \frac{1}{2}$ .

Para que  $f$  seja contínua em  $x = 4$  terá que se verificar  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$ .

$$f(4) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}$$

Assim,  $b = \frac{1}{4}$ .

## Unidade 4 - Assíntotas ao gráfico de uma função

### Páginas 48 a 62

44. Uma vez que a reta de equação  $x = 2$  é uma assíntota ao gráfico de  $f$ , que  $f$  é positiva em todo o seu domínio e que  $D_f = ]-\infty, 2[$ , tem-se que  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ .

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$ .

A opção correta é a (C).

45.

- a)  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

A função  $g$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ , pois é o quociente entre duas funções contínuas (ambas polinomiais).

Apenas as retas de equações  $x = -3$  e  $x = 3$  são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de  $g$ .

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9} = \frac{12}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação  $x = -3$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $g$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2(x^2 - x - 6)}{x^2 - 9} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2(x+2)}{x+3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x^2 - x - 6)}{x^2 - 9} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x+2)}{x+3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

A reta de equação  $x = 3$  não é uma assíntota vertical ao gráfico de  $g$ .

- b)  $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

A função  $h$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ , pois é o quociente entre duas funções contínuas (ambas polinomiais).

Apenas as retas de equações  $x = -1$  e  $x = 1$  são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de  $h$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{1 - x^2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

A reta de equação  $x = -1$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $h$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1 - x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação  $x = 1$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $h$ .

- c)  $D_i = \mathbb{R}$

A função  $i$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , pois é o quociente entre duas funções contínuas (ambas polinomiais). Logo, não há assíntotas verticais ao gráfico de  $i$ .

46. Como a reta de equação  $y = x - 1$  é uma assíntota ao gráfico de  $f$  e  $D_f = \mathbb{R}^+$ , então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 1) = 0.$$

A opção correta é a (B).

47. Como a reta de equação  $y = 2$  é uma assíntota ao gráfico de  $f$  e  $D_f = \mathbb{R}^+$ , então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .

Logo,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$ .

A opção correta é a (D).

48.

- a)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

### Assíntotas verticais

A função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , por se tratar de uma função racional.

Só a reta de equação  $x = 2$  é candidata a assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x-1}{x-2} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação  $x = 2$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

### Assíntotas horizontais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{3-0}{1-0} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{3-0}{1-0} = 3$$

A reta de equação  $y = 3$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

b)  $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$

### Assíntotas verticais

A função  $g$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ , por se tratar de uma função racional.

Só a reta de equação  $x = -\frac{1}{2}$  é candidata a assíntota vertical ao gráfico de  $g$ .

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação  $x = -\frac{1}{2}$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $g$ .

### Assíntotas horizontais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

A reta de equação  $y = 0$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $g$ .

c)  $D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

### Assíntotas verticais

A função  $h$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ , por se tratar de uma função racional.

Só a reta de equação  $x = \frac{1}{2}$  é candidata a assíntota vertical ao gráfico de  $h$ .

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{4x+3}{2x-1} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação  $x = \frac{1}{2}$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $h$ .

### Assíntotas horizontais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+3}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{4+0}{2-0} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+3}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{4+0}{2-0} = 2$$

A reta de equação  $y = 2$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $h$ .

49.  $D_j = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

### Assíntotas verticais

A função  $j$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ , por se tratar do quociente entre duas funções contínuas.

Só a reta de equação  $x = -4$  é candidata a assíntota vertical ao gráfico de  $j$ .

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} j(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{|2x-3|}{x+4} = \frac{11}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação  $x = -4$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $j$ .

### Assíntotas horizontais

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} j(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|2x-3|}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{x+4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{4}{x}} = 2 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = 2$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $j$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} j(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x-3|}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+3}{x+4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{4}{x}} = -2 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = -2$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $j$ .

50. Uma vez que  $D_g = \mathbb{R}^+$  e que a reta de equação

$y = 2x + 4$  é uma assíntota ao gráfico de  $g$ , tem-se que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$  e que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = 4$ .

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{g(x)}{x} \times (g(x) - 2x) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = 2 \times 4 = 8.$$

A opção correta é a (C).

51.

a)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

**Assíntotas verticais**

A função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ , por se tratar de uma função racional.

Só a reta de equação  $x = -2$  é candidata a assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x+6}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3(x+2)}{(x+2)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3}{x+2} = \frac{3}{0^-} = -\infty\end{aligned}$$

A reta de equação  $x = -2$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

**Assíntotas não verticais**

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+6}{x(x+2)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+6}{x^3+4x^2+4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+6}{(x+2)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+6}{x^2+4x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

A reta de equação  $y = 0$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

Quando  $x \rightarrow -\infty$ , os cálculos são idênticos e obtém-se a mesma reta.

b)  $D_g = \mathbb{R}$

**Assíntotas verticais**

A função  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , por se tratar de uma função racional.

Logo, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

**Assíntotas não verticais**

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+x}{x^3+x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^3+x}{x^2+1} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+x-2x^3-2x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

A reta de equação  $y = 2x$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $g$ .

Quando  $x \rightarrow -\infty$ , os cálculos são idênticos e obtém-se a mesma reta.

c)  $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

**Assíntotas verticais**

A função  $h$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ , por se tratar de uma função racional.

As retas de equações  $x = -1$  e  $x = 1$  são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de  $h$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2+4x+3}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação  $x = -1$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $h$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2+4x+3}{x^2-1} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação  $x = 1$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $h$ .

**Assíntotas não verticais**

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+4x+3}{x^3-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+4x+3}{x^2-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2\end{aligned}$$

A reta de equação  $y = 2$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $h$ .

Quando  $x \rightarrow -\infty$ , os cálculos são idênticos e obtém-se a mesma reta.

d)  $D_j = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

**Assíntotas verticais**

A função  $j$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ , por se tratar de uma função racional.

Só a reta de equação  $x = -3$  é candidata a assíntota vertical ao gráfico de  $j$ .

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} j(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x^2+3}{x+3} = \frac{21}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação  $x = -3$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $j$ .

**Assíntotas não verticais**

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+3}{x^2+3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{2}{1} = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [j(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 + 3}{x + 3} - 2x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3 - 2x^2 - 6x}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x + 3}{x + 3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{-6}{1} = -6
 \end{aligned}$$

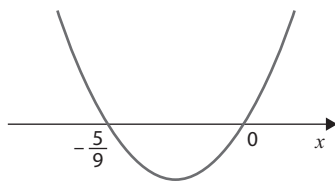
A reta de equação  $y = 2x - 6$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $j$ .

Quando  $x \rightarrow -\infty$ , os cálculos são idênticos e obtém-se a mesma reta.

$$\begin{aligned}
 e) D_p &= \{x \in \mathbb{R} : 9x^2 + 5x \geq 0 \wedge x + 1 \neq 0\} = \\
 &= \left( \left[ -\infty, -\frac{5}{9} \right] \cup [0, +\infty[ \right) \setminus \{-1\}
 \end{aligned}$$

#### Cálculo auxiliar

$$9x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(9x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{5}{9}$$



#### Assíntotas verticais

A função  $p$  é contínua em  $D_p$ , por se tratar do quociente entre duas funções contínuas.

Só a reta de equação  $x = -1$  é candidata a assíntota vertical ao gráfico de  $p$ .

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1^-} p(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{9x^2 + 5x}}{x + 1} = \\
 &= \frac{2}{0^-} = -\infty
 \end{aligned}$$

A reta de equação  $x = -1$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $p$ .

#### Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 5x}}{x^2 + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left( 9 + \frac{5}{x} \right)}}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x^2 + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x + 1} = \\
 &= \frac{3}{+\infty} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 5x}}{x + 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left( 9 + \frac{5}{x} \right)}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x + 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = \\
 &= \frac{3}{1} = 3
 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = 3$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $p$ .

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{p(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 5x}}{x^2 + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left( 9 + \frac{5}{x} \right)}}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x^2 + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x + 1} = \\
 &= \frac{-3}{+\infty} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 5x}}{x + 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left( 9 + \frac{5}{x} \right)}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x + 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{9 + \frac{5}{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = \\
 &= \frac{-3}{1} = -3
 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = -3$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $p$ .

$$f) D_r = \mathbb{R}$$

A função  $r$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , por se tratar da composta da função raiz quadrada com uma função polinomial.

Logo, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

#### Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left( 4 + \frac{1}{x} \right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}{x} =
 \end{aligned}$$



$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x}} = 2$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [r(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} - 2x) = \\ &= \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} - 2x) \times \frac{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x} = \\ &= \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = 2x$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $r$ .

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(4 + \frac{1}{x})}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\sqrt{4 + \frac{1}{x}} \right) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [r(x) + 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + 2x) = \\ &= \left[ \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + 2x) \times \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x} = \\ &= \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = -2x$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $r$ .

**g)**  $D_s = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

### Assíntotas verticais

A função  $s$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ , por se tratar do quociente de funções contínuas.

Só a reta de equação  $x = 5$  é candidata a assíntota vertical ao gráfico de  $s$ .

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 3}{|5 - x|} = \frac{22}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação  $x = 5$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $s$ .

### Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{s(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x|5 - x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x(-5 + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{5}{x}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (s(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 3}{|5 - x|} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 3}{-5 + x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3 + 5x - x^2}{x - 5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 3}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{5}{x}} = \frac{5}{1} = 5 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = x + 5$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $s$ .

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{s(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{x|5 - x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{x(5 - x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{-x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{-1 + \frac{5}{x}} = \frac{1}{-1} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (s(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 - 3}{|5 - x|} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 - 3}{5 - x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3 + 5x - x^2}{5 - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 3}{5 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - \frac{3}{x}}{-1 + \frac{5}{x}} = \frac{5}{-1} = -5 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = -x - 5$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $s$ .

**52.** Uma vez que  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$ , então a reta de equação  $x = -1$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $g$ .

A função  $g$  é contínua no seu domínio, que é  $]-\infty, -1[$ , logo não há outras assíntotas ao gráfico de  $g$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x) - 2x}{4x} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{4x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = 4 \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx + 1) &= 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx) + 1 = 3 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx) = 2, m \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $y = 4x + 2$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $g$ .

**53.**  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{c\}$

Uma vez que  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{c\}$  e que a reta de equação  $x = 1$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ , vem que  $c = 1$ .

A reta de equação  $y = -2$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ , logo  $a = -2$ .

Tem-se então que  $f(x) = -2 + \frac{b}{x-1}$ .

Como o ponto  $A(-1, 0)$  pertence ao gráfico de  $f$ , vem que:

$$f(-1) = 0 \Leftrightarrow -2 + \frac{b}{-1-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 - \frac{b}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{2} = -2$$

$$\Leftrightarrow b = -4$$

Assim,  $a = -2$ ,  $b = -4$  e  $c = 1$

## Aprende Fazendo

### Páginas 68 a 85

1. A função  $f$  é ímpar, uma vez que o seu gráfico é simétrico em relação à origem do referencial.

A reta de equação  $y = 0$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow -\infty$ , logo  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

Como se pode observar no gráfico de  $f$ , a função  $f$  é estritamente decrescente em  $\mathbb{R}^+$ .

Por observação do gráfico de  $f$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ , logo é falso que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

A opção correta é a (D).

2.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2 = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ logo}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

A opção correta é a (D).

3. A afirmação (A) é falsa. Para a função  $f$  ser contínua em  $x = a$ , sendo  $a \in D_f$ , tem-se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

A afirmação (B) é falsa. Se  $a \notin D_f$ , a função  $f$  pode ter limite no ponto de abscissa  $a$  e não é contínua nesse ponto.

A afirmação (C) é falsa. Se  $a \notin D_f$ , mas

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \text{ então existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

A afirmação (D) é verdadeira. Se  $f$  é contínua em  $x = a$ , então  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ . Em particular,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

A opção correta é a (D).

$$4. D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$$

$$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

#### Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} 2x-1 \quad | \quad x+1 \\ -2x-2 \quad 2 \\ \hline -3 \end{array}$$

A opção correta é a (D).

5. Em todas as opções encontram-se representadas funções contínuas em  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , tais que  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -3$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ .

Apenas na função cuja representação gráfica é a da opção (C) se tem que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$ , ou seja, que a reta de equação  $y = x + 1$  é uma assíntota ao gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .

A opção correta é a (C).

6. Se  $g(x) = x$ , então:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^3 + x} \times x) = 0$$

Se  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ , então:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (f \times g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^3 + x}}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x^3 + x}{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x(x^2 + 1)}{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^3}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{0^+}} = +\infty \end{aligned}$$

Se  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , então:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (f \times g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^3 + x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x^3 + x}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{0 + 1} = 1 \end{aligned}$$

Se  $g(x) = \sqrt{x}$ , então:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^3 + x} \times \sqrt{x}) = 0$$

A opção correta é a (C).

$$7. \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x-5}{(5-x)^4} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{-1}{(5-x)^3} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

A opção correta é a (B).

8.

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{g(x)} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

A opção correta é a (B).

$$b) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{h(x)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

A opção correta é a (D).

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (g \times h)(x) = -1 \times (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{g}{h} \right)(x) = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \times h)(x) = -1 \times (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{g}{h} \right)(x) = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

A opção correta é a (B).

9. O gráfico de  $g$  é a imagem do gráfico de  $f$  pela translação de vetor  $(3, 0)$ . Logo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 1$$

A opção correta é a (B).

$$10. \lim u_n = \lim (-n^2 - n) = -\infty$$

$$\text{Logo, } \lim h(u_n) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -2.$$

$$\lim v_n = \lim \left( -\frac{1}{n} - 1 \right) = -1^-$$

$$\text{Logo, } \lim h(v_n) = \lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = -\infty.$$

A opção correta é a (C).

11. Para que a função  $f$  tenha limite no ponto de abscissa 3 terá que se verificar  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left( \frac{kx}{3} - \frac{k}{2} \right) = k - \frac{k}{2} = \frac{k}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{3x-x}}{x-3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left( \frac{\sqrt{3x-x}}{x-3} \times \frac{\sqrt{3x+x}}{\sqrt{3x+x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x-x^2}{(x-3)(\sqrt{3x+x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x(x-3)}{(x-3)(\sqrt{3x+x})} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x}{\sqrt{3x+x}} =$$

$$= \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Assim, } \frac{k}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -1.$$

A opção correta é a (B).

$$12. \lim_{x \rightarrow -2^+} \left( \frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1+x-2}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-1+x}{x^2-4} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

A opção correta é a (A).

$$13. \lim f(x_n) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty. \text{ Logo, } \lim x_n = 1^-.$$

$$\text{Se } x_n = 1 + \frac{1}{n}, \text{ então } \lim x_n = 1^+.$$

$$\text{Se } x_n = \frac{2n-1}{n}, \text{ então } \lim x_n = 2^-.$$

$$\text{Se } x_n = \frac{n-1}{n}, \text{ então } \lim x_n = 1^-.$$

$$\text{Se } x_n = 2 + \frac{1}{n}, \text{ então } \lim x_n = 2^+.$$

A opção correta é a (C).

$$14. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{x-x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)}}{x-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}}{-x(-1+x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}}{-x(-1+x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}}{-1+x} =$$

$$= \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2+1-3x}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \left( x - \frac{1}{2} \right) (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{1}{2} = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x-x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{\sqrt{1-x}}{x-x^2} \times \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1-x}{x(1-x)\sqrt{1-x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1}{x\sqrt{1-x}} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq f(1) \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$$

A opção correta é a (B).

15. A afirmação (A) é falsa. Contraexemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

A afirmação (B) é verdadeira. Por exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

A afirmação (C) é falsa. Contraexemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

A afirmação (D) é falsa. Contraexemplo:  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

A opção correta é a (B).

16.  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : a + bx \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

A reta de equação  $y = -1$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ , logo  $\frac{2}{b} = -1 \Leftrightarrow b = -2$ .

Uma vez que a reta de equação  $x = 1$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ , vem que:

$$-\frac{b}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 2$$

A opção correta é a (A).

17.  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-a\}$

#### Assíntotas verticais

A função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$ , por se tratar de uma função racional.

Só a reta de equação  $x = -a$  é candidata a assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow -a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -a^-} \frac{x^2 - a^2}{x + a} = \lim_{x \rightarrow -a^-} \frac{(x - a)(x + a)}{x + a} = \lim_{x \rightarrow -a^-} (x - a) = -2a$$

Quando  $x \rightarrow -a^+$ , os cálculos são idênticos e obtém-se o mesmo valor.

A reta de equação  $x = -a$  não é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

#### Assíntotas horizontais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - a^2}{x + a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{a^2}{x}}{1 + \frac{a}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - a^2}{x + a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{a^2}{x}}{1 + \frac{a}{x}} = -\infty$$

O gráfico de  $f$  não tem assíntotas horizontais.

A opção correta é a (D).

18. Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -4$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$ , então as retas de equações  $y = -4$  e  $y = 2$  são assíntotas horizontais ao gráfico de  $g$ . Logo, o gráfico de  $g$  não tem assíntotas oblíquas, já que tem duas assíntotas horizontais.

Não há dados suficientes para concluir que o gráfico de  $g$  não tem assíntotas verticais; o gráfico de  $g$  pode ter assíntotas verticais.

A opção correta é a (D).

19. A afirmação (A) é falsa. Contraexemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

A afirmação (B) é falsa. Contraexemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

A afirmação (C) é falsa. Contraexemplo:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

A afirmação (D) é verdadeira. Por exemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

A opção correta é a (D).

20.  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - ax^2}{ax + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} - a}{\frac{a}{x} + 2} = -\frac{a}{2}$

Quando  $x \rightarrow -\infty$ , os cálculos são idênticos e obtém-se o mesmo valor.

Para que a assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$  seja paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares:

$$m = 1 \Leftrightarrow -\frac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = -2$$

A opção correta é a (B).

21. O gráfico de  $f$  é uma reta a que pertencem os pontos de coordenadas  $(2, 0)$  e  $(0, -2)$ .

Logo,  $f(x) = mx - 2$ .

$$m = \frac{0 + 2}{2 - 0} = 1$$

Assim,  $f(x) = x - 2$ .

a)  $g(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{f(x)} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = x - 3, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$ , pelo que a função  $g$  é negativa no intervalo  $]-\infty, 3[$  e é positiva no intervalo  $]3, +\infty[$ .

$$D'_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \text{ já que } 2 - 3 = -1.$$

A opção correta é a (C).

b)  $g(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow x = 3$

Logo, a função  $g$  tem um único zero.

A opção correta é a (D).

c)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x)}{x - 2} = -1$ , logo o gráfico da função  $g$  não tem assíntotas verticais.

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3) = +\infty$  e

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 3) = -\infty$ , o gráfico da função  $g$  não tem assíntotas horizontais.

A opção correta é a (D).

**22.**

a)  $\lim f(u_n) = +\infty$ , logo  $\lim u_n = 1^-$ .

Ora,  $u_n = \frac{4n+a}{4n} = 1 + \frac{a}{4n}$ . Assim, para que

$\lim u_n = 1^-$  tem que se ter  $a < 0$ .

A opção correta é a (A).

b)  $1 \notin D_f$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{f(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{f(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{f(x)} = 0.$$

A opção correta é a (B).

c) O gráfico de  $f^{-1}$  é simétrico do gráfico de  $f$  em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Logo, se as assíntotas ao gráfico de  $f$  são as retas de equações  $x = 1$  e  $y = -2$ , então as assíntotas ao gráfico de  $f^{-1}$  são as retas de equações  $x = -2$  e  $y = 1$ .

A opção correta é a (C).

**23.**

a) A assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$  contém os pontos de coordenadas  $(-3, 0)$  e  $(0, -3)$ , pelo que a sua equação é  $y = -x - 3$ .

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x - 3)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x + 3) = 0.$$

A opção correta é a (C).

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{f(x)} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} - 1 = \frac{1}{-1} - 1 = -2$$

A reta de equação  $y = -2$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

A opção correta é a (D).

**24.** O gráfico da função  $g$  é a imagem do gráfico da função  $f$  pela translação de vetor  $(1, -3)$ .

Assim, como o gráfico da função  $f$  tem uma assíntota vertical de equação  $x = 0$ , então o gráfico da função  $g$  tem uma assíntota vertical de equação  $x = 1$ . Por outro lado, é possível obter uma função  $f$  nas condições do enunciado e cujo contradomínio seja  $]-1, +\infty[$ , pelo que também é possível que a função  $g$  tenha contradomínio  $]-4, +\infty[$ .

O gráfico da função  $h$  é a imagem do gráfico da função  $f$  por uma reflexão de eixo  $Oy$ .

Assim, como o gráfico da função  $f$  tem uma assíntota vertical de equação  $x = 0$ , então o gráfico da função  $h$  tem uma assíntota vertical de equação  $x = 0$ . Por outro lado, o contradomínio da função  $h$  é igual ao contradomínio da função  $f$ .

A opção correta é a (D).

**25.** Sabe-se que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ , logo a reta de equação  $x = 0$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ , e que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , logo a reta de equação  $y = 1$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

O gráfico de  $g$  é a imagem do gráfico de  $f$  pela translação de vetor  $(-2, 1)$  seguida da reflexão em relação ao eixo  $Ox$ .

Assim, as retas de equações  $x = -2$  e  $y = -2$  são assíntotas ao gráfico de  $g$ .

A opção correta é a (C).

**26.** Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x + 1) = 0$ , então a reta de equação  $y = 2x - 1$  é uma assíntota ao gráfico de  $f$ . Uma vez que  $g(x) = f(|x|)$ , então as retas de equações  $y = 2x - 1$  e  $y = -2x - 1$  são assíntotas ao gráfico de  $g$ .

O gráfico de  $f$  admite uma única assíntota vertical. Se essa assíntota se situar à esquerda do eixo  $Oy$ , então o gráfico de  $g$  não admite assíntotas verticais. Se essa assíntota se situar à direita do eixo  $Oy$ , então o gráfico de  $g$  admite duas assíntotas verticais, simétricas em relação a  $Oy$ . Se a assíntota vertical ao gráfico de  $f$  for a reta de equação  $x = 0$ , então o gráfico de  $g$  admite também a reta de equação  $x = 0$  como assíntota vertical.

Assim, o gráfico da função  $g$  tem no mínimo duas assíntotas.

A opção correta é a (B).

**27.**

$$\text{a) } D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

$$D'_f = ]-\infty, 1] \cup ]2, 5]$$

$$\text{b) i) } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 5$$

$$\text{c) } f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

Como  $f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ , então não existe limite no ponto de abscissa 1.

$$4 \notin D_f$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 5$$

Como  $4 \notin D_f$  e  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ , então existe limite no ponto de abscissa 4.

d) Por exemplo,  $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ .

28.

a)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)]^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{-1} = -1$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

29.

a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - x^3) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2x) = 3$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$ , então não existe

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x).$$

b) Como  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = h(1) = 0$ , então  $h$  é contínua à esquerda do ponto de abscissa 1.

c) Como não existe  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ , então  $h$  é descontínua em  $x = 1$ .

d) Por exemplo,  $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ -3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ .

e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x^3 \left( \frac{1}{x^2} - 1 \right) \right] = -\infty \times (-1) = +\infty$

30.

a)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - x} = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \wedge x^2 - x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \wedge x(x - 1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 3}{4} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \left( x = 2 \vee x = \frac{1}{2} \right) \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{1}{2}$$

Os zeros de  $f$  são  $\frac{1}{2}$  e 2.

$x$	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1		2	$+\infty$
$2x^2 - 5x + 2$	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$x^2 - x$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - x}$	+	n.d.	-	0	+	n.d.	-	0	+

$f$  é positiva em  $]-\infty, 0[ \cup \left] \frac{1}{2}, 1[ \cup ]2, +\infty[$  e é negativa em  $\left] 0, \frac{1}{2} \right[ \cup ]1, 2[$ .

b)  $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{2x^2 + x - 3} = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \wedge 2x^2 + x - 3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1) \wedge x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1) \wedge x \neq \frac{-1 \pm 5}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1) \wedge x \neq -\frac{3}{2} \wedge x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

O zero de  $g$  é -1.

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		-1		1	$+\infty$
$1 - x^2$	-	-	-	0	+	0	-
$2x^2 + x - 3$	+	0	-	-	-	0	+
$\frac{1 - x^2}{2x^2 + x - 3}$	-	n.d.	+	0	-	n.d.	-

$g$  é positiva em  $\left] -\frac{3}{2}, -1 \right[$  e é negativa em  $\left] -\infty, -\frac{3}{2} \right[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

c)  $h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2x} - \frac{x+4}{2x^2-x} + \frac{2x+17}{4x-2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2x} - \frac{x+4}{x(2x-1)} + \frac{2x+17}{2(2x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(2x-1) - 2(x+4) + x(2x+17)}{2x(2x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{10x - 5 - 2x - 8 + 2x^2 + 17x}{2x(2x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 25x - 13}{2x(2x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 25x - 13 = 0 \wedge 2x(2x-1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 104}}{4} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-25 \pm 27}{4} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2} \vee x = -13\right) \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -13$$

O zero de  $h$  é  $-13$ .

$$h(x) = \frac{5}{2x} - \frac{x+4}{2x^2-x} + \frac{2x+17}{4x-2} =$$

$$= \frac{2x^2+25x-13}{2x(2x-1)}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$$

$x$	$-\infty$	$-13$		$0$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x^2 + 25x - 13$	+	0	-	-	-	0	+
$2x(2x-1)$	+	+	+	0	-	0	+
$\frac{2x^2+25x-13}{2x(2x-1)}$	+	0	-	n.d.	+	n.d.	+

$h$  é positiva em  $]-\infty, -13[ \cup ]0, \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, +\infty[$  e é negativa em  $]-13, 0[$ .

**d)**  $i(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3x-x^2}{2-2x} \times \frac{x^2-1}{x^3-9x} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-x(3+x)(x-1)(x+1)}{2(1-x)x(x-3)(x+3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2(x-3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \wedge 2(x-3) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \wedge x \neq 3$$

$$\Leftrightarrow x=-1$$

O zero de  $i$  é  $-1$ .

$$i(x) = \frac{-3x-x^2}{2-2x} \times \frac{x^2-1}{x^3-9x} = \frac{x+1}{2(x-3)}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 1, 3\}$$

$x$	$-\infty$	$-3$		$-1$		$0$		$1$		$3$	$+\infty$
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$2(x-3)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{x+1}{2(x-3)}$	+	n.d.	+	0	-	n.d.	-	n.d.	-	n.d.	+

$i$  é positiva em  $]-\infty, -3[ \cup ]-3, -1[ \cup ]3, +\infty[$  e é negativa em  $]-1, 0[ \cup ]0, 1[ \cup ]1, 3[$ .

**e)**  $j(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{3x^2-12} : \frac{x^2-3x+2}{(x-2)^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)^2}{3(x^2-4)(x-1)(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{3(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3(x+2)} = 0, \text{ que é uma equação impossível.}$$

A função  $j$  não tem zeros.

#### Cálculo auxiliar

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

Assim,  $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ .

$$j(x) = \frac{x-1}{3x^2-12} : \frac{x^2-3x+2}{(x-2)^2} = \frac{1}{3(x+2)}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$$

$x$	$-\infty$	$-2$		$1$		$2$	$+\infty$
<b>1</b>	+	+	+	+	+	+	+
<b><math>3(x+2)</math></b>	-	0	+	+	+	+	+
<b><math>\frac{1}{3(x+2)}</math></b>	-	n.d.	+	n.d.	+	n.d.	+

$j$  é positiva em  $]-2, 1[ \cup ]1, 2[ \cup ]2, +\infty[$  e é negativa em  $]-\infty, -2[$ .

**f)**  $k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{x^3-2x^2+x-2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{(x-2)(x^2+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \wedge \underbrace{x^2+1 \neq 0}_{\text{Condição universal em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

O zero de  $k$  é  $0$ .

#### Cálculo auxiliar

	1	-2	1	-2
2		2	0	2
	1	0	1	0

Assim,  $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2+1)$ .

$$k(x) = \frac{x^2-2x}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{x}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$x$	$-\infty$	$0$		$2$	$+\infty$
<b><math>x</math></b>	-	0	+	+	+
<b><math>x^2+1</math></b>	+	+	+	+	+
<b><math>\frac{x}{x^2+1}</math></b>	-	0	+	n.d.	+

$k$  é positiva em  $]0, 2[ \cup ]2, +\infty[$  e é negativa em  $]-\infty, 0[$ .

#### 31.

**a)**  $\lim a_n = \lim \frac{n+1}{n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1^+$

$$\lim g(a_n) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$$

$$\lim b_n = \lim \frac{n-1}{n} = \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1^-$$

$$\lim g(b_n) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 4$$

**b)** Como  $\lim g(a_n) = 2$  e  $\lim g(b_n) = 4$ , então não é verdade que para toda a sucessão  $(x_n)$  de elementos de  $D_g$ , convergente para 1,  $g(x_n)$  tende para o mesmo limite. Logo, não existe  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ .

**c)** Por exemplo,  $c_n = 2 + \frac{1}{n}$ .

**32.** Seja  $f$  a função real de variável real definida por  $f(x) = x^2 - 1$  e  $(x_n)$  uma sucessão qualquer de termos pertencentes a  $D_f = \mathbb{R}$  tal que  $x_n \rightarrow 2$ .

Então:

$$\begin{aligned} \lim f(x_n) &= \lim (x_n^2 - 1) = \\ &= \lim x_n^2 - 1 = \\ &= (\lim x_n)^2 - 1 = \\ &= 2^2 - 1 = \\ &= 3 \end{aligned}$$

Conclui-se assim que  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = 3$ .

**33.**

$$\mathbf{a)} \quad f(u_n) = f\left(-1 + \frac{1}{n^2}\right) = 2 - \left(-1 + \frac{1}{n^2}\right) = 3 - \frac{1}{n^2}$$

$$f(v_n) = f\left(-1 - \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{-1 - \frac{1}{n}}{3} = \frac{3 - 1 - \frac{1}{n}}{3} = \frac{2n - 1}{3n}$$

$$\lim f(u_n) = \lim \left(3 - \frac{1}{n^2}\right) = 3$$

$$\lim f(v_n) = \lim \frac{2n - 1}{3n} = \lim \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3n}\right) = \frac{2}{3}$$

**b)** Como  $\lim f(u_n) = 3$  e  $\lim f(v_n) = \frac{2}{3}$ , então não é verdade que para toda a sucessão  $(x_n)$  de elementos de  $D_f$ , convergente para  $-1$ ,  $f(x_n)$  tende para o mesmo limite. Logo, não existe  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

**c)** Seja  $f$  a função real de variável real definida por  $f(x) = 2 - x$  e  $(x_n)$  uma sucessão qualquer de termos pertencentes a  $] -1, +\infty[$  tal que  $x_n \rightarrow 0$ .

Então:

$$\begin{aligned} \lim f(x_n) &= \lim (2 - x_n) = \\ &= 2 - \lim x_n = \\ &= 2 - 0 = \\ &= 2 \end{aligned}$$

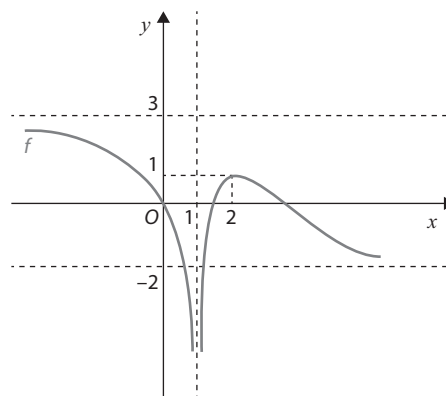
Conclui-se assim que  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - x) = 2$ , ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2.$$

**34.** Como  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ , então a reta de equação  $x = 1$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

Uma vez que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ , então as retas de equações  $y = 3$  e  $y = -2$  são assíntotas horizontais ao gráfico de  $f$ .

Um possível gráfico de  $f$  é:



**35.**

$$\mathbf{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (8 - x^3) = 8 - 2^3 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ , então não existe

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3) = 2^2 - 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ , então não existe

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \quad (f+g)(x) &= \begin{cases} 8 - x^3 + x^2 - 3 & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{x} - 1 + \frac{x+1}{x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 5 - x^3 + x^2 & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{x} - 1 + 1 + \frac{1}{x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 5 - x^3 + x^2 & \text{se } x < 2 \\ \frac{2}{x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathbf{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (5 - x^3 + x^2) = 5 - 2^3 + 2^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{2} = 1 = (f+g)(2)$$



Como  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (f+g)(x) = (f+g)(2)$ ,  
então existe  $\lim_{x \rightarrow 2} (f+g)(x)$ .

**36.**

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + x^2) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 - 5x + 1}{x - 4} \right)^3 = \left( \frac{1 - 5 + 1}{1 - 4} \right)^3 = 1^3 = 1$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5 + 3x^2 - 1) = +\infty + (+\infty) - 1 = +\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^5 + 3x^2 - 1) = \lim_{(\infty - \infty) \ x \rightarrow +\infty} \left( x^5 \left( -1 + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^5} \right) \right) =$   
 $= +\infty \times (-1) = -\infty$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x}) =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+x^2} - x) \times (\sqrt{x+x^2} + x)}{\sqrt{x+x^2} + x} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x^2 - x^2}{\sqrt{x+x^2} + x} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left( \frac{1}{x} + 1 \right)} + x} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{\frac{1}{x} + 1} + x} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{\frac{1}{x} + 1} + x} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left( \sqrt{\frac{1}{x} + 1} + 1 \right)} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{x} + 1} + 1} = \frac{1}{2}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{(x-4)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

h)  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{16-x^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$

**37.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + x}}{x} = 2$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left( a + \frac{1}{x} \right)}}{x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{a + \frac{1}{x}}}{x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{a + \frac{1}{x}}}{x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{a + \frac{1}{x}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} = 2$$

$$\Leftrightarrow a = 4$$

**38.**

a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-x}{(x-2)^4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{(x-2)^3} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{(x-2)^4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{(x-2)^3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Como  $2 \notin D$  e  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-x}{(x-2)^4} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{(x-2)^4}$ , então  
existe  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)^4}$ .

b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( x^2 - \frac{x-1}{|1-x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( x^2 - \frac{x-1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( x^2 - \frac{x-1}{|1-x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( x^2 - \frac{x-1}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2$$

Como  $1 \notin D$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( x^2 - \frac{x-1}{|1-x|} \right) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( x^2 - \frac{x-1}{|1-x|} \right)$ ,  
então não existe  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( x^2 - \frac{x-1}{|1-x|} \right)$ .

**39.**

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-2x-3} = \lim_{\left( \frac{0}{0} \right) \ x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-3)} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{4}$

**Cálculo auxiliar**

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

Assim,  $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3-1}{3x-x^3} - \frac{5}{x} \right) =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3 \left( 1 - \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left( \frac{3}{x^2} - 1 \right)} - \frac{5}{x} \right) =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 - \frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x^2} - 1} - \frac{5}{x} \right) = -1 - 0 = -1$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} &= \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x-2)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

#### Cálculo auxiliar

	1	-6	12	-8
2		2	-8	8
	1	-4	4	0

Assim:

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 12x - 8 &= (x-2)(x^2 - 4x + 4) = \\ &= (x-2)(x-2)^2 = \\ &= (x-2)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{(x-1)^2} &= \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + 1}{x-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

#### Cálculo auxiliar

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0

Assim,  $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ .

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2}{x^3} + \frac{x^3 - 1}{x - x^3} \right) &= 1 - 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x - x^3} = \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left( 1 - \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left( \frac{1}{x^2} - 1 \right)} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2} - 1} = \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x(x-4)}}{x-4} &= \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left( 1 - \frac{4}{x} \right)}}{x-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{4}{x}}}{x-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{4}{x}}}{x \left( 1 - \frac{4}{x} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{4}{x}}}{1 - \frac{4}{x}} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+3)(2x+5)(3x-7)}{2x^3 + x^2 + 1} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 + 19x^2 - 32x - 105}{2x^3 + x^2 + 1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left( 6 + \frac{19}{x} - \frac{32}{x^2} - \frac{105}{x^3} \right)}{x^3 \left( 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{19}{x} - \frac{32}{x^2} - \frac{105}{x^3}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{2-x} &= \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\sqrt{x+2} - 2}{2-x} \times \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(2-x)(\sqrt{x+2} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(2-x)(\sqrt{x+2} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{\sqrt{x+2} + 2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt[4]{x^4 + 2}} &= \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt[4]{x^4 \left( 1 + \frac{2}{x^4} \right)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{|x| \sqrt[4]{1 + \frac{2}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x \sqrt[4]{1 + \frac{2}{x^4}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\sqrt[4]{1 + \frac{2}{x^4}}} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{x^3 - x}{x^2 + 2} \right) &= \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x - x^3 + x}{x^2 + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2 + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2 \left( 1 + \frac{2}{x^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x \left( 1 + \frac{2}{x^2} \right)} = \frac{3}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) \right) &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \times \frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x+1)(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(x+1)(x-1)} = -2 \end{aligned}$$

40.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 3x - 1) = +\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 - 3x) = +\infty - (-\infty) = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 - 3x) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x^3 \left( 4 - \frac{3}{x^2} \right) \right) = \\ = -\infty \times 4 = -\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{5x+3} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( 2 - \frac{1}{x} \right)}{x \left( 5 + \frac{3}{x} \right)} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{5 + \frac{3}{x}} = \frac{2}{5}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 5x - 1}{2x + 1} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left( 3x + 5 - \frac{1}{x} \right)}{x \left( 2 + \frac{1}{x} \right)} = \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 5 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}} \stackrel{(-\infty)}{=} \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 1}{5x^3 + x^2 - 4} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left( 3 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^3 \left( 5 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} \right)} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}}{x \left( 5 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} \right)} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \frac{3}{+\infty} = 0$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+5}}{\frac{3}{4-x}} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x}{3x+15} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( \frac{4}{x} - 1 \right)}{x \left( 3 + \frac{15}{x} \right)} \stackrel{(\frac{0}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x} - 1}{3 + \frac{15}{x}} = -\frac{1}{3}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2x+1} \times (x^2 - 7x + 1) \right) \stackrel{(0 \times \infty)}{=} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 7x + 1}{2x + 1} = \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left( 1 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x \left( 2 + \frac{1}{x} \right)} = \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left( 1 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{2 + \frac{1}{x}} \stackrel{(-\infty)}{=} \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5}{x^2 - 1} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5}{x^2 - 1} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{5}{x^2 - 4} - \frac{3}{x - 2} \right) \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5 - 3(x+2)}{x^2 - 4} = \\ = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x - 1}{x^2 - 4} \stackrel{(\frac{-7}{0^-})}{=} \frac{-7}{0^-} = +\infty$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-5}{1-x^2} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5}{1+x} = -\frac{5}{2}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x^2 - 4x + 3} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+4)}{(x-1)(x-3)} = \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+4)}{x-3} = \frac{10}{-2} = -5$$

**Cálculos auxiliares**

$$\bullet 2x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4$$

$$\text{Assim, } 2x^2 + 6x - 8 = (x-1)(x+4).$$

$$\bullet x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

$$\text{Assim, } x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3).$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^3 - 7x + 6} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)^2}{(x-1)(x^2 + x - 6)} = \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{x^2 + x - 6} = 0$$

**Cálculo auxiliar**

	1	0	-7	6
1		1	1	-6
	1	1	-6	0

$$\text{Assim, } x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6).$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 6x}{x^3 - 4x^2} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(x+3)}{x^2(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x+3)}{x(x-4)}$$

**Limites laterais**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 6x}{x^3 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(x+3)}{x(x-4)} = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 6x}{x^3 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(x+3)}{x(x-4)} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 6x}{x^3 - 4x^2} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 6x}{x^3 - 4x^2}, \text{ então não}$$

$$\text{existe } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 6x}{x^3 - 4x^2}.$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x^3} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3 \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 \sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

$$\text{Seja } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}.$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 \geq 0 \wedge x^2 - 5x + 6 > 0\} = \\ &= ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[ \cap ]-\infty, 2[ \cup ]3, +\infty[ = \\ &= ]-\infty, -2] \cup ]3, +\infty[ \end{aligned}$$

Como 2 não é ponto aderente a  $D_f$ , não existe

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}.$$

**41.**

**a)** A função  $f$  é contínua em  $]-\infty, 4[$ , por se tratar de uma função racional.

**b)** Para que a função  $f$  seja contínua em  $x = 4$ , terá de se verificar  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$ .

$$f(4) = \frac{k^2 - 4}{8 - 4} = \frac{k^2 - 4}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{k^2 - x}{8 - x} = \frac{k^2 - 4}{4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x - 4}{\sqrt{2x + 1} - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \left( \frac{x - 4}{\sqrt{2x + 1} - 3} \times \frac{\sqrt{2x + 1} + 3}{\sqrt{2x + 1} + 3} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x - 4)(\sqrt{2x + 1} + 3)}{2x + 1 - 9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x - 4)(\sqrt{2x + 1} + 3)}{2(x - 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{2x + 1} + 3}{2} = 3 \end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{k^2 - 4}{4} = 3 \Leftrightarrow k^2 - 4 = 12$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow k = 4 \vee k = -4$$

Como se pede o valor de  $k$  positivo, então  $k = 4$ .

**42.**

**a)** A função  $f$  é contínua em todo o seu domínio, por se tratar de uma função racional.

**b)** Para que a função  $g$  seja contínua em  $x = 1$ , terá de se verificar  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^3 - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{3}$$

#### Cálculo auxiliar

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0

$$\text{Assim, } x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

$$\text{Assim, } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^3 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

**43.**

$$\mathbf{a)} } D_f = \{x \in \mathbb{R}: 9 - x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

#### Assíntotas verticais

A função  $f$  é contínua no seu domínio, por se tratar da soma de duas funções contínuas (uma função afim e uma função racional). Assim, só as retas de equações  $x = -3$  e  $x = 3$  são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \left( x + 5 + \frac{x}{9 - x^2} \right) = 2 - \frac{3}{0^-} = +\infty$$

A reta de equação  $x = -3$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left( x + 5 + \frac{x}{9 - x^2} \right) = 8 + \frac{3}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação  $x = 3$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

#### Assíntotas não verticais

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 5 + \frac{x}{9 - x^2}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{9 - x^2} \right) = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 5 + \frac{x}{9 - x^2} - x \right) =$$

$$= 5 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{9 - x^2} = 5 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{9}{x} - x} = 5 + 0 = 5$$

A reta de equação  $y = x + 5$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .

Quando  $x \rightarrow -\infty$ , os cálculos são idênticos e, portanto, também se obtém a mesma reta.

$$\mathbf{b)} } D_g = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

#### Assíntotas verticais

A função  $g$  é contínua no seu domínio, por se tratar de uma função racional. Assim, só as retas de

equações  $x = -2$  e  $x = 2$  são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de  $g$ .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^2 - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-2)(x^2 - 3x - 4)}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 3x - 4}{x+2} = \frac{6}{0^-} = -\infty\end{aligned}$$

#### Cálculo auxiliar

	1	-5	2	8
2		2	-6	-8
	1	-3	-4	0

Assim,  $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x-2)(x^2 - 3x - 4)$ .

A reta de equação  $x = -2$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $g$ .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^2 - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x^2 - 3x - 4)}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x - 4}{x+2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^2 - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2 - 3x - 4)}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x - 4}{x+2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

A reta de equação  $x = 2$  não é uma assíntota vertical ao gráfico de  $g$ .

#### Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^2 - 4}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^3 - 4x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^2 - 4} - x\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8 - x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2 + 6x + 8}{x^2 - 4} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(-5 + \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5 + \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = -5\end{aligned}$$

A reta de equação  $y = x - 5$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $g$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .

Quando  $x \rightarrow -\infty$ , os cálculos são idênticos e, portanto, também se obtém a mesma reta.

$$c) D_h = \{x \in \mathbb{R}: x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

#### Assíntotas verticais

A função  $h$  é contínua no seu domínio, por se tratar da soma de duas funções contínuas (uma função afim e uma função racional). Assim, só a reta de equação  $x = 3$  é candidata a assíntota vertical ao gráfico de  $h$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(x + 1 - \frac{3x}{x-3}\right) = 4 - \frac{9}{0^-} = +\infty$$

A reta de equação  $x = 3$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $h$ .

#### Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1 - \frac{3x}{x-3}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-3}\right) = 1 + 0 - 0 = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{3x}{x-3} - x\right) = \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x-3} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 - \frac{3}{x}} = 1 - 3 = -2\end{aligned}$$

A reta de equação  $y = x - 2$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $h$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .

Quando  $x \rightarrow -\infty$ , os cálculos são idênticos e, portanto, também se obtém a mesma reta.

$$d) D_i = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0 \wedge x + 2 \geq 0\} = [-2, 0[ \cup ]0, +\infty[$$

#### Assíntotas verticais

A função  $i$  é contínua no seu domínio, por se tratar do quociente de duas funções contínuas. Assim, só a reta de equação  $x = 0$  é candidata a assíntota vertical ao gráfico de  $i$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} i(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x+2}}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação  $x = 0$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $i$ .

### Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x+2}}{2x}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{2x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x+2}}{2x^2} \times \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{2x\sqrt{x+2}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x+2}}{2x} \times \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{2x\sqrt{x+2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{2\sqrt{x+2}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = 0$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $i$ .

e)  $D_j = \{x \in \mathbb{R}: |x| \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

### Assíntotas verticais

A função  $j$  é contínua no seu domínio, por se tratar do quociente de duas funções contínuas. Assim, só a reta de equação  $x = 0$  é candidata a assíntota vertical ao gráfico de  $j$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} j(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 2}{|x|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação  $x = 0$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $j$ .

### Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + 2}{|x|}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{x^2} \right) = 1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (j(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 2}{|x|} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2 - x^2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = x$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $j$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 + 2}{|x|}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{-x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -1 - \frac{2}{x^2} \right) = -1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (j(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 + 2}{|x|} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2 - x^2}{-x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = -x$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $j$  quando  $x \rightarrow -\infty$ .

f)  $D_k = \{x \in \mathbb{R}: x - 1 \neq 0 \wedge x \geq 0\} = [0, 1[ \cup ]1, +\infty[$

### Assíntotas verticais

A função  $k$  é contínua no seu domínio, por se tratar do quociente de duas funções contínuas. Assim, só a reta de equação  $x = 1$  é candidata a assíntota vertical ao gráfico de  $k$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

A reta de equação  $x = 1$  não é uma assíntota vertical ao gráfico de  $k$ .

### Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 1}{x(x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x} - 1}{x(x - 1)} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x(x-1)(\sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(\sqrt{x+1})} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

A reta de equação  $y = 0$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $k$ .

**44.**

**a)**  $D_g = \{x \in \mathbb{R} : 2-x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3+x}{2-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3+x = 0 \wedge 2-x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \wedge x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

O zero de  $g$  é  $-3$ .

**b)**  $g(x) = \frac{3+x}{2-x} = -1 + \frac{5}{2-x} = -1 + \frac{-5}{x-2}$

**Cálculo auxiliar**

$$\begin{array}{r|l} x+3 & -x+2 \\ \hline -x+2 & -1 \\ \hline & 5 \end{array}$$

Assim,  $a = -5$ ,  $b = -1$  e  $c = 2$ .

**c)** A reta de equação  $x = 2$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $g$  e a reta de equação  $y = -1$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $g$ .

**d)**  $D'_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

**e)** A função  $g$  não é ímpar, uma vez que  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$  e, portanto,  $-2 \in D_g$  mas  $2 \notin D_g$ .

**f)** O gráfico de  $h$  obtém-se do gráfico de  $g$  por uma translação de vetor  $(-3, 1)$ , logo as assíntotas ao gráfico de  $h$  são as retas de equações  $x = 2 - 3 \Leftrightarrow x = -1$  e  $y = -1 + 1 \Leftrightarrow y = 0$ .

**45.**

**a)**  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

**b)** A reta de equação  $x = 2$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$  e a reta de equação  $y = -4$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

**c)** Uma vez que as retas de equações  $x = 2$  e  $y = -4$  são assíntotas ao gráfico de  $f$ , tem-se:

$$f(x) = -4 + \frac{k}{x-2}$$

O ponto de coordenadas  $(3, 0)$  pertence ao gráfico de  $f$ , logo:

$$f(3) = 0 \Leftrightarrow -4 + \frac{k}{3-2} = 0 \Leftrightarrow -4 + k = 0 \Leftrightarrow k = 4$$

Assim,  $f(x) = -4 + \frac{4}{x-2}$ .

**d)** O gráfico de  $h$  obtém-se do gráfico de  $f$  através de uma translação de vetor  $(0, 2)$  seguida de uma reflexão de eixo  $Ox$  dos pontos de ordenada negativa. Logo,  $D'_h = [0, +\infty[$ .

**46.**

**a)** Para que exista  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  terá de se verificar

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1+ax}{ax-1} = \frac{1+2a}{2a-1}$$

Assim:

$$\frac{1+2a}{2a-1} = 3 \Leftrightarrow \frac{1+2a}{2a-1} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+2a-6a+3}{2a-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4a+4}{2a-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow -4a+4 = 0 \wedge 2a-1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \wedge a \neq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

**b)** Para que a função  $f$  seja contínua, terá de se verificar  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 = f(2)$ .

$$\text{Assim, } h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ 3 & \text{se } x = 2. \\ \frac{1+x}{x-1} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

**c)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+ax}{ax-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( \frac{1}{x} + a \right)}{x \left( a - \frac{1}{x} \right)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + a}{a - \frac{1}{x}} = \frac{a}{a} = 1, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Logo, qualquer elemento desta família de funções tem uma assíntota horizontal de equação  $y = 1$ .

47.

a)  $f(0) = \frac{0}{2} = 0$ , ou seja, o gráfico de  $f$  interseca o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas  $(0, 0)$ .

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x-x^2}{x+2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x-x^2 = 0 \wedge x+2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x(1-x) = 0 \wedge x \neq -2 \\ &\Leftrightarrow (x=0 \vee x=1) \wedge x \neq -2 \\ &\Leftrightarrow x=0 \vee x=1 \end{aligned}$$

Os pontos de coordenadas  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  são os pontos de interseção do gráfico de  $f$  com o eixo das abscissas.

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) < 1 &\Leftrightarrow \frac{x-x^2}{x+2} < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-x^2}{x+2} - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-x^2-x-2}{x+2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2-2}{x+2} < 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{x^2+2}{x+2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+2}{x+2} > 0 \end{aligned}$$

Como  $x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , então

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2}{x+2} > 0 &\Leftrightarrow x+2 > 0 \\ &\Leftrightarrow x > -2 \end{aligned}$$

Logo, o conjunto-solução da inequação é  $]-2, +\infty[$ .

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) &= \frac{x-x^2}{x+2} = \\ &= -x + 3 - \frac{6}{x+2} \end{aligned}$$

#### Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} -x^2 + x & x+2 \\ \hline x^2 + 2x & -x+3 \\ \hline 3x & \\ -3x-6 & \\ \hline -6 & \end{array}$$

Assim,  $a = -1, b = 3, c = -6$  e  $d = -2$ .

d) As assíntotas ao gráfico de  $f$  são as retas de equações  $x = -2$  e  $y = -x + 3$ .

48.

a)

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  é o declive da reta que passa nos pontos de coordenadas  $(-2, 0)$  e  $(0, -1)$ .

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \frac{0+1}{-2-0} = \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

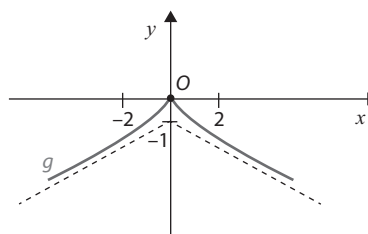
ii)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} |f(x)| = |-\infty| = +\infty$

iii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + \frac{1}{2}x\right) = -1$ , uma vez que

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + \frac{1}{2}x\right)$  é a ordenada na origem da reta que passa no ponto de coordenadas  $(0, -1)$ .

b)

i)



ii)  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = 0.$$

iii) As assíntotas ao gráfico de  $g$  são as retas de equações  $y = -\frac{1}{2}x - 1$  e  $y = \frac{1}{2}x - 1$ .

iv)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \left(-\frac{1}{2}x - 1\right)\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

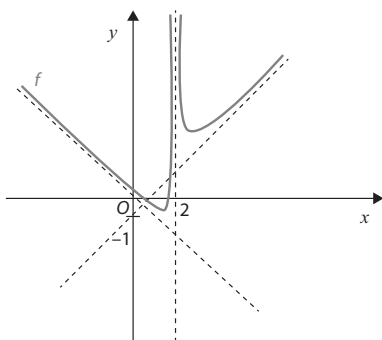
49.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = 0$ , logo a reta de equação  $y = -x$  é uma assíntota ao gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow -\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ , logo a reta de equação  $x = 2$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 1) = 0$ , logo a reta de equação  $y = x - 1$  é uma assíntota ao gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .



Assim, um possível gráfico de  $f$  é:



50.

$$\begin{aligned} \text{a) } V(t) &= 1 + \frac{1}{t+1} - \frac{6}{(t+1)^2} = \\ &= \frac{(t+1)^2 + t + 1 - 6}{(t+1)^2} = \\ &= \frac{t^2 + 2t + 1 + t - 5}{(t+1)^2} = \\ &= \frac{t^2 + 3t - 4}{(t+1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } V(30) = \frac{30^2 + 3 \times 30 - 4}{31^2} = \frac{986}{961} \approx 1,026$$

30 dias após o início da campanha, o volume de vendas diárias foi de 1026 u.m., aproximadamente.

$$\begin{aligned} \text{c) } V(t) \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{t^2 + 3t - 4}{(t+1)^2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{t^2 + 3t - 4}{(t+1)^2} - 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{t^2 + 3t - 4 - t^2 - 2t - 1}{(t+1)^2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{t - 5}{(t+1)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Como  $(t+1)^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , então:

$$\begin{aligned} \frac{t-5}{(t+1)^2} \leq 0 &\Leftrightarrow t-5 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow t \leq 5 \end{aligned}$$

O volume de vendas não ultrapassou as 1000 unidades nos primeiros 5 dias.

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + 3t - 4}{(t+1)^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + 3t - 4}{t^2 + 2t + 1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 \left(1 + \frac{3}{t} - \frac{4}{t^2}\right)}{t^2 \left(1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}\right)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{t} - \frac{4}{t^2}}{1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

Com o decorrer do tempo, o volume de vendas tende a estabilizar nas 1000 unidades.

51.

$$\text{a) } g(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2x - 1}$$

$$\text{b) } D_g = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

A função  $g$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ , por se tratar de uma função racional.

$$\begin{aligned} \text{ii) } m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x - 4}{2x - 1} - \frac{1}{2}x\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 6x - 8 - 2x^2 + x}{2(2x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x - 8}{4x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5 - \frac{8}{x}}{4 - \frac{2}{x}} = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $g$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .

Quando  $x \rightarrow -\infty$ , os cálculos são idênticos e, portanto, também se obtém a mesma reta.

$$\text{b) } D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - a \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{2}\right\}, \text{ com } a \in \mathbb{R}.$$

Logo, nenhum elemento da família tem domínio  $\mathbb{R}$ .

c) O gráfico de  $f$  não admite assíntotas verticais se o numerador e o denominador admitirem zeros comuns.

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 4 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Se 4 for um zero do denominador:

$$2 \times 4 - a = 0 \Leftrightarrow a = 8$$

Se -1 for um zero do denominador:

$$2 \times (-1) - a = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

Assim, se  $a = 8$  ou  $a = -2$ , o gráfico de  $f$  não admite assíntotas verticais.

**52.** Se o gráfico de  $f$  admite uma assíntota de equação

$$y = 2x + b, \text{ então } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^5 + 3x^4 + 8x}{3x^5 + 4x} = 2 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 \left( a + \frac{3}{x} + \frac{8}{x^4} \right)}{x^5 \left( 3 + \frac{4}{x^4} \right)} = 2 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a + \frac{3}{x} + \frac{8}{x^4}}{3 + \frac{4}{x^4}} = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{3} = 2 \\ &\Leftrightarrow a = 6 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } f(x) = \frac{6x^5 + 3x^4 + 8x}{3x^4 + 4}.$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{6x^5 + 3x^4 + 8x}{3x^4 + 4} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^5 + 3x^4 + 8x - 6x^5 - 8x}{3x^4 + 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{3x^4 + 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{x^4 \left( 3 + \frac{4}{x^4} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{3 + \frac{4}{x^4}} = \frac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$

**53.**

$$\text{a) } D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x^2 + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

#### Cálculos auxiliares

	1	-1	0	2
-1		-1	2	-2
	1	-2	2	0

$$\bullet x^3 - x^2 + 2 = (x+1)(x^2 - 2x + 2)$$

$$\bullet x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}, \text{ que é uma equação}$$

impossível em  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } g(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^4 - x^2}{x^3 - x^2 + 2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \wedge x^3 - x^2 + 2 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \wedge x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = 0 \vee x^2 - 1 = 0) \wedge x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1) \wedge x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

A afirmação é falsa, uma vez que a função  $g$  admite dois zeros.

$$\begin{aligned} \text{c) } g(x) &= \frac{x^4 - x^2}{x^3 - x^2 + 2} = \\ &= \frac{x^2(x^2 - 1)}{(x+1)(x^2 - 2x + 2)} = \\ &= \frac{x^2(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2 - 2x + 2)} = \\ &= \frac{x^2(x-1)}{x^2 - 2x + 2} = \\ &= \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 2x + 2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \end{aligned}$$

#### d) Assíntotas verticais

Uma vez que  $g(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 2x + 2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  e que

$x^2 - 2x + 2 \neq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , a função  $g$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , logo o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

#### Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 - x^2}{x^2 - 2x + 2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2}{x^3 - 2x^2 + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left( 1 - \frac{1}{x} \right)}{x^3 \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 2x + 2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 - x^3 + 2x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left( 1 - \frac{2}{x} \right)}{x^2 \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$$

A reta de equação  $y = x + 1$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $g$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .

Quando  $x \rightarrow -\infty$ , os cálculos são idênticos e, portanto, também se obtém a mesma reta.

**54.**

**a)** A primeira torneira enche o recipiente em 8 horas, logo ao fim de 1 hora o recipiente está  $\frac{1}{8}$  cheio.

A segunda torneira enche o recipiente em 4 horas, logo ao fim de 1 hora o recipiente está  $\frac{1}{4}$  cheio.

A terceira torneira enche o recipiente em  $t$  horas, logo ao fim de 1 hora o recipiente está  $\frac{1}{t}$  cheio.

Se as três torneiras funcionarem simultaneamente, ao fim de 1 hora o recipiente estará

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{t} = \frac{3t+8}{8t} \text{ cheio.}$$

Assim:

$$\frac{1 \text{ hora}}{\frac{3t+8}{8t} \text{ recipiente}} = \frac{h \text{ horas}}{1 \text{ recipiente}}$$

$$\text{Logo, } h(t) = \frac{8t}{3t+8}, t > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } h(t) = 1,5 &\Leftrightarrow \frac{8t}{3t+8} - \frac{3}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{16t - 9t - 24}{6t+16} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7t-24}{6t+16} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7t-24=0 \wedge 6t+16=0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{24}{7} \wedge t \neq -\frac{16}{6}$$

$$\text{Logo, } t = \frac{24}{7} \text{ h.}$$

**55.**

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{|x-4|}{x^2-16} &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-x+4}{(x-4)(x+4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-1}{x+4} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{se } x \geq 4 \\ -x+4 & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3} \times \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} \times \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+4-4)(\sqrt{x+9}+3)}{(x+9-9)(\sqrt{x+4}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{3-|x+3|} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{3-x-3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{-x} = 1 \end{aligned}$$

**Cálculos auxiliares**

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

**56.**

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2-1}{y-1} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)(y+1)}{y-1} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} (y+1) = 2 \end{aligned}$$

Mudança de variável

$$y = \sqrt{x}, \text{ logo } x = y^2.$$

Se  $x \rightarrow 1$ , então  $y \rightarrow 1$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} &= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^3-8}{y-2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{y-2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 2} (y^2+2y+4) = 4+4+4 = 12 \end{aligned}$$

Mudança de variável

$$y = \sqrt[3]{x}, \text{ logo } x = y^3.$$

Se  $x \rightarrow 8$ , então  $y \rightarrow 2$ .

**Cálculos auxiliares**

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	0

$$57. \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{-\infty - 1}{0^+} = -\infty$$

Logo, a reta de equação  $x = 0$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $g$ .

Tem-se que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = -1 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-2x)) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-2x) + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-2x - 1)) = 0 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $y = -2x - 1$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$ .

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2.$$

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = -2 - 0 = -2 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $y = -2$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $g$ .

## Unidade 5 - Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

Páginas 86 a 118

54.

$$a) \text{ t.m.v.}_{[2, 3]} = \frac{d(3) - d(2)}{3 - 2} = \frac{30 - 14}{1} = 16 \text{ m/s}$$

$$b) \text{ t.m.v.}_{[2, 2,5]} = \frac{d(2,5) - d(2)}{2,5 - 2} = \frac{21,25 - 14}{0,5} = 14,5 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} c) \text{ t.m.v.}_{[2, x]} &= \frac{d(x) - d(2)}{x - 2} = \frac{3x^2 + x - 14}{x - 2} = \\ &= \frac{3(x - 2)\left(x + \frac{7}{3}\right)}{x - 2} = \\ &= (3x + 7) \text{ m/s} \end{aligned}$$

### Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} 3x^2 + x - 14 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 168}}{6} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 13}{6} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{7}{3} \vee x = 2 \end{aligned}$$

$$55. \text{ t.m.v.}_{[a, b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{9b - 9a}{b - a} = \frac{9(b - a)}{b - a} = 9, \text{ quaisquer que sejam os valores de } a \text{ e de } b.$$

56. (I) Proposição verdadeira

Seja  $f$  uma função crescente em  $[a, b]$ . Se  $a < b$ , então  $f(a) < f(b)$ , ou seja,  $f(b) - f(a) > 0$ .

$$\text{Logo, t.m.v.}_{[a, b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

(II) Proposição falsa

Contraexemplo:

Seja  $f(x) = x^2$ . Tem-se que  $\text{t.m.v.}_{[-1, 2]} > 0$ , mas a função não é crescente em  $[-1, 2]$ .

57.

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{(x - 2)(x + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x - 2} + \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \\ &= -\frac{1}{4} \times f'(-2) = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{f(-2 + h) - f(-2)} &= 3 \times \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}} = \\ &= 3 \times \frac{1}{f'(-2)} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

58.

$$\begin{aligned} a) f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x - 0}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + 6)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x + 6) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x - 0}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2 - 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x(x + 1)) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x+1}{x-3} + 3}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1 + 3x - 9}{(x - 2)(x - 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - 8}{(x - 2)(x - 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{x - 3} = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } f(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} \times \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1 - 4}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

59.

$$\text{a) } t.m.v._{[2, 20]} = \frac{C(20) - C(2)}{20 - 2} = \frac{5 - 9,86}{18} = -0,27$$

#### Cálculos auxiliares

- $C(20) = -0,005 \times 20^3 + 0,225 \times 20^2 - 3 \times 20 + 15 = 5$
- $C(2) = -0,005 \times 2^3 + 0,225 \times 2^2 - 3 \times 2 + 15 = 9,86$

A cotação das ações diminui em média 0,27 euros por dia, no período indicado.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } C'(15) &= \lim_{t \rightarrow 15} \frac{C(t) - C(15)}{t - 15} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 15} \frac{-0,005 \times t^3 + 0,225 \times t^2 - 3 \times t + 15 - 3,75}{t - 15} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 15} \frac{-0,005 \times t^3 + 0,225 \times t^2 - 3 \times t + 11,25}{t - 15} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 15} \frac{(t - 15)(-0,005t^2 + 0,15t - 0,75)}{t - 15} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 15} (-0,005t^2 + 0,15t - 0,75) = 0,375
 \end{aligned}$$

#### Cálculo auxiliar

	-0,005	0,225	-3	11,25
15		-0,075	2,25	-11,25
	-0,005	0,15	-0,75	0

Passados 15 dias, a cotação das ações estava a aumentar à taxa de 0,375 euros por dia.

60.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}}{x - 3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 - x - 1}{(x - 3)4(x + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x + 3}{(x - 3)4(x + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{4(x + 1)} = -\frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

b) Como  $f(3) = -\frac{1}{16}$ , a equação pedida é da forma

$$y = -\frac{1}{16}x + b.$$

O ponto de coordenadas  $\left(3, \frac{1}{4}\right)$  pertence a esta reta tangente ao gráfico de  $f$ , logo:

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{16} \times 3 + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{16}$$

Assim, a equação pedida é  $y = -\frac{1}{16}x + \frac{7}{16}$ .

c) A equação pedida é da forma  $y = 16x + b$ .

O ponto de coordenadas  $\left(3, \frac{1}{4}\right)$  pertence a esta

reta, logo  $\frac{1}{4} = 16 \times 3 + b \Leftrightarrow b = -\frac{191}{4}$ .

Assim, a equação pedida é  $y = 16x - \frac{191}{4}$ .

61. A bissetriz dos quadrantes ímpares é a reta de equação  $y = x$ , cujo declive é 1. Logo:

$$f(4) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = 1$$

A opção correta é a (B).

$$\begin{aligned}
 \text{62. } f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 3 - 1}{x - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x - 2)}{x - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) = 0
 \end{aligned}$$

#### Cálculo auxiliar

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

Como o declive da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 1 é 0, então trata-se de uma reta horizontal.

63.

$$\text{a) } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 6}{x - 1}$$

#### Limites laterais

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - 6}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 5 - 6}{x - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} =
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+x+1) = 3$$

#### Cálculo auxiliar

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-6}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x+3-6}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-3}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x-1)}{x-1} = 3$$

Uma vez que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-6}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-6}{x-1} = 3$ , então

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-6}{x-1} = 3, \text{ ou seja, } f'(1) = 3.$$

- b)** A função  $f$  é contínua no ponto de abscissa 1, uma vez que é diferenciável em 1, como se verificou na alínea anterior.

#### 64. Continuidade

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0$$

$$g(0) = 0$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0)$ , então a função  $g$  é contínua em  $x = 0$ .

#### Diferenciabilidade

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x|}}{x}$$

#### Limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x\sqrt{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt{-x}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{|x|}}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{|x|}}{x}, \text{ então } f \text{ não}$$

admite derivada em  $x = 0$ .

65.

$$\text{a) } h'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t)-h(0)}{t-0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{20t-t^2-0}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(20-t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (20-t) = 20$$

A velocidade inicial do projétil é 20 m/s.

$$\text{b) } h(t) = 0 \Leftrightarrow 20t - t^2 = 0 \Leftrightarrow t(20-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee 20-t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 20$$

O projétil atinge o solo 20 segundos após o lançamento.

$$h'(20) = \lim_{t \rightarrow 20} \frac{h(t)-h(20)}{t-20} = \lim_{t \rightarrow 20} \frac{20t-t^2-0}{t-20} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 20} \frac{t(20-t)}{t-20} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 20} (-t) = -20$$

No momento em que o projétil atinge o solo a velocidade é -20 m/s.

$$\text{c) } h'(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(t+x)-h(t)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20(t+x) - (t+x)^2 - (20t-t^2)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20t+20x-t^2-2tx-x^2-20t+t^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20x-2tx-x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (20-2t-x) = 20-2t$$

66.

$$\text{a) } f'(x) = x' = 1$$

$$\text{b) } g'(x) = (x+\pi)' = x' + \pi' = 1+0 = 1$$

$$\text{c) } (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 1+1 = 2$$

$$\text{67. } g'(x) = (f(x)+1)' = f'(x) + 1' = f'(x)$$

Logo, a representação gráfica da função derivada da função  $g$  está na figura (II).

68.

$$\text{a) } (f \times g)'(5) = f'(5) \times g(5) + f(5) \times g'(5) =$$

$$= 1 \times (5+3\pi) + 5 \times 1 =$$

$$= 5+3\pi+5 =$$

$$= 10+3\pi$$

#### Cálculos auxiliares

$$\bullet f'(x) = x' = 1$$

$$\bullet g'(x) = (x+3\pi)' = 1+0 = 1$$

$$\text{b) i) } (f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x) =$$

$$= 1 \times (x+3\pi) + x \times 1 =$$

$$= x+3\pi+x =$$

$$= 2x+3\pi$$

$$\text{ii) } \left(\frac{g}{f}\right)'(x) = \frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f^2(x)} =$$

$$= \frac{1 \times x - (x + 3\pi) \times 1}{x^2} =$$

$$= \frac{x - x - 3\pi}{x^2} = -\frac{3\pi}{x^2}$$

69.

a)  $(f + g)'(2) = f'(2) + g'(2) = -2 + 1 = -1$

b)  $(5f)'(2) = 5f'(2) = 5 \times (-2) = -10$

c)  $(f \times g)'(2) = f'(2) \times g(2) + f(2) \times g'(2) =$   
 $= -2 \times (-3) + 4 \times 1 =$   
 $= 6 + 4 = 10$

d)  $\left(\frac{1}{f}\right)'(2) = \frac{0 - f'(2)}{f^2(2)} = -\frac{-2}{4^2} = \frac{1}{8}$

e)  $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2) \times g(2) - f(2) \times g'(2)}{g^2(2)} =$   
 $= \frac{-2 \times (-3) - 4 \times 1}{(-3)^2} = \frac{2}{9}$

f)  $\left(\frac{1}{f+g}\right)'(2) = \frac{0 - (f+g)'(2)}{(f+g)^2(2)} = -\frac{-1}{(4-3)^2} = 1$

g)  $(g \times g)'(2) = g'(2) \times g(2) + g(2) \times g'(2) =$   
 $= 1 \times (-3) + (-3) \times 1 = -6$

h)  $\left(\frac{f}{f+g}\right)'(2) = \frac{f'(2)(f+g)(2) - f(2)(f+g)'(2)}{(f+g)^2(2)} =$   
 $= \frac{-2 \times 1 - 4 \times (-1)}{(4-3)^2} =$   
 $= \frac{-2+4}{1} = 2$

70.  $m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$  é o declive da reta tangente ao gráfico de  $f$  que tem inclinação  $60^\circ$ .

Logo:

$$f'(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow (x^2 - x - 2)' = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

71.  $f'(x) = (x^3 - x^2)' = 3x^2 - 2x$

$$f'(1) = 3 - 2 = 1$$

Assim,  $1 = \operatorname{tg} \theta$ , com  $0^\circ < \theta < 180^\circ$ , ou seja,  $\theta = 45^\circ$ .

Logo, a inclinação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 1 é  $45^\circ$ .

72.

a)  $f'(x) = (x^2 + 5x + 3)' = 2x + 5$

b)  $g'(x) = \left(\frac{1}{2}x^3 - x + 2020\right)' = \frac{3}{2}x^2 - 1$

c)  $h'(x) = (x^3 \sqrt{x})' = (x^3)' \sqrt{x} + x^3 (\sqrt{x})' =$   
 $= 3x^2 \sqrt{x} + x^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} =$

$$= \frac{6x^2 \times x + x^3}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{7x^3}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{7x^3 \sqrt{x}}{2x} =$$

$$= \frac{7x^2 \sqrt{x}}{2}$$

d)  $p'(x) = \left(\frac{5}{x}\right)' = \frac{0 - 5 \times x'}{x^2} = -\frac{5}{x^2}$

e)  $q'(x) = \left(\frac{1}{x} + 2\sqrt{x}\right)' =$   
 $= -\frac{1}{x^2} + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} =$   
 $= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

f)  $r'(x) = \left(\frac{2x-3}{x+1}\right)' =$   
 $= \frac{2 \times (x+1) - (2x-3) \times 1}{(x+1)^2} =$   
 $= \frac{2x+2-2x+3}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$

73.

a)  $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(4) = 3 \times 16 - 5 = 43$

b)  $(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \times g'(1) = f'(4) \times 2 = 24 \times 2 = 48$

**Cálculo auxiliar**

$$f'(x) = (3x^2 - 5)' = 6x$$

74.

a)  $\alpha'(x) = \left(4x^3 - \frac{3}{5}x^2 - 2x + 7\right)' = 12x^2 - \frac{6}{5}x - 2$

b)  $b'(x) = \left(\pi x^{10} - \frac{1}{e}x^7 - 2x^3 + 9\right)' = 10\pi x^9 - \frac{7}{e}x^6 - 6x^2$

c)  $c'(x) = ((2x^2 - 3)^4)' = 4(2x^2 - 3)^3(2x^2 - 3)' =$   
 $= 4(2x^2 - 3)^3 \times 4x =$   
 $= 16x(2x^2 - 3)^3$

d)  $d'(x) = ((x^4 - 5x^2)^3(x^6 - 5x^5))' =$   
 $= ((x^4 - 5x^2)^3)'(x^6 - 5x^5) + (x^4 - 5x^2)^3((x^6 - 5x^5))' =$   
 $= 3(x^4 - 5x^2)^2(x^4 - 5x^2)'(x^6 - 5x^5) +$   
 $+ (x^4 - 5x^2)^3(6x^5 - 25x^4) =$   
 $= 3(x^4 - 5x^2)^2(4x^3 - 10x)(x^6 - 5x^5) +$   
 $+ (x^4 - 5x^2)^3(6x^5 - 25x^4)$

e)  $e'(x) = \left(\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)(3 - x^3)\right)' =$   
 $= \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)'(3 - x^3) + \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)(3 - x^3)' =$   
 $= -x(3 - x^3) + \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)(-3x^2) =$

$$= -3x + x^4 - 6x^2 + \frac{3}{2}x^4 =$$

$$= \frac{5}{2}x^4 - 6x^2 - 3x$$

$$\text{f)} f'(x) = \left( \frac{2x-5}{3x+1} \right)' =$$

$$= \frac{2(3x+1) - (2x-5) \times 3}{(3x+1)^2} =$$

$$= \frac{6x+2-6x+15}{(3x+1)^2} = \frac{17}{(3x+1)^2}$$

$$\text{g)} g'(x) = \left( \left( \frac{2x-3}{x^2-4} \right)^3 \right)' =$$

$$= 3 \left( \frac{2x-3}{x^2-4} \right)^2 \left( \frac{2x-3}{x^2-4} \right)' =$$

$$= 3 \left( \frac{2x-3}{x^2-4} \right)^2 \frac{2(x^2-4) - (2x-3)2x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= 3 \left( \frac{2x-3}{x^2-4} \right)^2 \frac{2x^2-8-4x^2+6x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{3(2x-3)^2(-2x^2+6x-8)}{(x^2-4)^4}$$

$$\text{h)} h'(x) = (\sqrt{x^2+3})' = (x^2+3)^{\frac{1}{2}}' =$$

$$= \frac{1}{2} (x^2+3)^{-\frac{1}{2}} (x^2+3)' =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \times 2x =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\text{i)} i'(x) = (\sqrt[3]{2x^4-1})' = (2x^4-1)^{\frac{1}{3}}' =$$

$$= \frac{1}{3} (2x^4-1)^{-\frac{2}{3}} (2x^4-1)' =$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{(2x^4-1)^2}} \times 8x^3 =$$

$$= \frac{8x^3}{3\sqrt[3]{(2x^4-1)^2}}$$

$$\text{j)} j''(x) = \left( \sqrt{\frac{2x-1}{3x+1}} \right)' = \left( \left( \frac{2x-1}{3x+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right)'$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{2x-1}{3x+1} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{2x-1}{3x+1} \right)' =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}} \times \frac{2(3x+1) - (2x-1) \times 3}{(3x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}} \times \frac{6x+2-6x+3}{(3x+1)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}} \times \frac{5}{2(3x+1)^2}$$

$$\text{k)} k'(x) = \left( \frac{1}{x + \sqrt{x+2}} \right)' =$$

$$= \frac{-(x + \sqrt{x+2})'}{(x + \sqrt{x+2})^2} =$$

$$= \frac{-1 - \left( (x+2)^{\frac{1}{2}} \right)'}{(x + \sqrt{x+2})^2} =$$

$$= \frac{-1 - \frac{1}{2} (x+2)^{-\frac{1}{2}}}{(x + \sqrt{x+2})^2} =$$

$$= \frac{-1 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{(x + \sqrt{x+2})^2} =$$

$$= \frac{\frac{-2\sqrt{x+2}-1}{2\sqrt{x+2}}}{(x + \sqrt{x+2})^2} =$$

$$= \frac{-2\sqrt{x+2}-1}{2\sqrt{x+2}(x + \sqrt{x+2})^2}$$

$$\text{75. } f'(x) = (3x^2)' = 6x$$

$$g'(x) = \left( \frac{4}{1+x^2} \right)' = \frac{-4 \times 2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{8x}{(1+x^2)^2}$$

#### a) Primeiro processo

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = g'(3x^2) \times 6x =$$

$$= -\frac{8 \times 3x^2}{(1 + (3x)^2)^2} \times 6x$$

$$= -\frac{144x^3}{(9x^4 + 1)^2}$$

#### Segundo processo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2) = \frac{4}{1 + (3x^2)^2} = \frac{4}{1 + 9x^4}$$

$$(g \circ f)'(x) = \left( \frac{4}{1 + 9x^4} \right)' =$$

$$= -\frac{4(1 + 9x^4)'}{(1 + 9x^4)^2} =$$

$$= -\frac{4 \times 36x^3}{(9x^4 + 1)^2} =$$

$$= -\frac{144x^3}{(9x^4 + 1)^2}$$

#### b) Primeiro processo

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) =$$

$$= f' \left( \frac{4}{1+x^2} \right) \times \left( -\frac{8x}{(1+x^2)^2} \right) =$$

$$= 6 \times \frac{4}{1+x^2} \times \left( -\frac{8x}{(1+x^2)^2} \right) =$$

$$= -\frac{192x}{(x^2+1)^3}$$



**Segundo processo**

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f\left(\frac{4}{1+x^2}\right) = \\
 &= 3 \times \left(\frac{4}{1+x^2}\right)^2 = \\
 &= \frac{48}{(x^2+1)^2} \\
 (f \circ g)'(x) &= \left(\frac{48}{(x^2+1)^2}\right)' = \\
 &= -\frac{48 \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4} = \\
 &= -\frac{192x}{(x^2+1)^3}
 \end{aligned}$$

**c) Primeiro processo**

$$\begin{aligned}
 (f \circ f)'(x) &= f'(f(x)) \times f'(x) = f'(3x^2) \times 6x = \\
 &= 6 \times 3x^2 \times 6x = \\
 &= 108x^3
 \end{aligned}$$

**Segundo processo**

$$\begin{aligned}
 (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(3x^2) = 3 \times (3x^2)^2 = 3 \times 9x^4 = 27x^4 \\
 (f \circ f)'(x) &= (27x^4)' = 4 \times 27x^3 = 108x^3
 \end{aligned}$$

$$76. f'(x) = \left(\frac{x+1}{4x}\right)' = \frac{4x - (x+1) \times 4}{(4x)^2} = \frac{4x - 4x - 4}{16x^2} = \frac{-1}{4x^2}$$

$$h'(x) = (x^2 - 3x)' = 2x - 3$$

$$a) (f \circ h)(2) = f(h(2)) = f(2^2 - 3 \times 2) = f(-2) = \frac{-2+1}{4 \times (-2)} = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned}
 b) (f \circ h)'(2) &= f'(h(2)) \times h'(2) = f'(-2) \times (2 \times 2 - 3) = \\
 &= \frac{-1}{4 \times (-2)^2} \times 1 = \\
 &= -\frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) (f \circ h)'(x) &= f'(h(x)) \times h'(x) = f'(x^2 - 3x) \times (2x - 3) = \\
 &= \frac{-1}{4(x^2 - 3x)^2} \times (2x - 3) = \\
 &= \frac{3 - 2x}{4(x^2 - 3x)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 77. f'(x) &= (\sqrt{x^2 + 5})' = \left((x^2 + 5)^{\frac{1}{2}}\right)' = \\
 &= \frac{1}{2} (x^2 + 5)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \\
 &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a) (f + g)'(-1) &= f'(-1) + g'(-1) = \frac{-1}{\sqrt{6}} + 3 = \\
 &= \frac{-1 + 3\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \\
 &= \frac{-\sqrt{6} + 18}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) (f \times g)'(-1) &= f'(-1) \times g(-1) + f(-1) \times g'(-1) = \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{6}} \times 2 + \sqrt{6} \times 3 = \\
 &= \frac{-2}{\sqrt{6}} + 3\sqrt{6} = \\
 &= \frac{-2 + 18}{\sqrt{6}} = \\
 &= \frac{16\sqrt{6}}{6} = \frac{8\sqrt{6}}{3}
 \end{aligned}$$

$$c) (f \circ g)'(-1) = f'(g(-1)) \times g'(-1) = f'(2) \times 3 = \frac{2}{3} \times 3 = 2$$

**78.**

$$\begin{aligned}
 a) f'(x) &= (4x^3)' = 12x^2 \\
 f'(-\sqrt{2}) &= 12 \times 2 = 24
 \end{aligned}$$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa  $-\sqrt{2}$  é da forma  $y = 24x + b$ .

O ponto de coordenadas  $(-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2})) = (-\sqrt{2}, -8\sqrt{2})$  pertence a esta reta, logo:

$$-8\sqrt{2} = 24 \times (-\sqrt{2}) + b \Leftrightarrow b = 16\sqrt{2}$$

Assim, a equação pedida é  $y = 24x + 16\sqrt{2}$ .

b) A bissetriz dos quadrantes ímpares é a reta de equação  $y = x$ , cujo declive é 1.

Como a reta  $r$  é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, então o seu declive é também 1.

Logo, a equação reduzida da reta  $r$  é do tipo  $y = x + b$ .

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 \Leftrightarrow 12x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{12} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{3}} \vee x = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{6} \vee x = -\frac{\sqrt{3}}{6}
 \end{aligned}$$

As abscissas dos pontos do gráfico de  $f$  em que a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares são  $\frac{\sqrt{3}}{6}$  e  $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ .

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{18} \\
 f\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{18}
 \end{aligned}$$

O ponto de coordenadas  $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{18}\right)$  pertence

à reta  $r$ , logo  $\frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{6} + b \Leftrightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{9}$ .

Assim,  $r: y = x - \frac{\sqrt{3}}{9}$ .

O ponto de coordenadas  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{18}\right)$  pertence à reta  $r$ , logo  $-\frac{\sqrt{3}}{18} = -\frac{\sqrt{3}}{6} + b \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{9}$ .  
Assim,  $r: y = x + \frac{\sqrt{3}}{9}$ .

c) Para que as retas tangentes aos gráficos sejam perpendiculares, o produto dos seus declives terá de ser igual a  $-1$ . Assim:

$$f'(x) \times g'(x) = -1 \Leftrightarrow 12x^2 \times \frac{-a}{x^2} = -1 \Leftrightarrow -12a = -1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{12}$$

79.

a) Como  $f$  é uma função contínua em  $[0, 4]$  e diferenciável em  $]0, 4[$ , pelo Teorema de Lagrange existe

$$c \in ]0, 4[ \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{28 - 0}{4} = 7.$$

$$f'(x) = (x^2 + 3x)' = 2x + 3$$

$$f'(x) = 7 \Leftrightarrow 2x + 3 = 7 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Logo,  $c = 2$ .

b)  $f'(c) = 7$ , logo a equação pedida é do tipo  $y = 7x + b$ .  
 $f(2) = 10$

O ponto de coordenadas  $(2, 10)$  pertence à reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $c$ , logo:

$$10 = 7 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -4$$

A equação pedida é  $y = 7x - 4$ .

80.

a) A afirmação é falsa.

Contraexemplo:

$$f(x) = (x - 3)^2$$

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{1 - 4}{3} = -\frac{3}{4} < 0, \text{ mas } f \text{ não é decrescente em } ]1, 4[.$$

b) A afirmação é falsa.

Contraexemplo:

$$f(x) = x^3$$

$f'(0) = 0$ , mas a função não tem extremo em  $x = 0$ .

c) A afirmação é falsa.

Contraexemplo:

$$f(x) = |x|$$

A função  $f$  tem um mínimo relativo em  $x = 0$ , mas não existe  $f'(0)$ .

d) A afirmação é verdadeira, pelo Teorema da página 110.

81.

a)  $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 - 9x + 7)' = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 12}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

$x$	$-\infty$	$-1$		$3$	$+\infty$
Sinal de $f'$	+	0	-	0	+
Variação de $f$	$\nearrow$	Máx. 12	$\searrow$	Mín. -20	$\nearrow$

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 7 = 12$$

$$f(3) = 27 - 27 - 27 + 7 = -20$$

$f$  é estritamente crescente em  $]-\infty, -1]$  e em  $[3, +\infty[$  e é estritamente decrescente em  $[-1, 3]$ ; 12 é um máximo relativo em  $-1$ ;  $-20$  é um mínimo relativo em  $3$ .

b)  $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$g'(x) = \left(\frac{x+4}{x-1}\right)' = \frac{x-1-(x+4)}{(x-1)^2} =$$

$$= -\frac{5}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$g$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, 1[$  e em  $]1, +\infty[$ ; não tem extremos.

c)  $D_h = \mathbb{R}$

$$h'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{x^2+1-x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \wedge \underbrace{(x^2+1)^2 \neq 0}_{\text{Condição universal em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

$x$	$-\infty$	$-1$		$1$	$+\infty$
Sinal de $h'$	-	0	+	0	-
Variação de $h$	$\searrow$	Mín. $-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	Máx. $\frac{1}{2}$	$\searrow$

$$h(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$h(1) = \frac{1}{2}$$

$h$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, -1]$  e em  $[1, +\infty[$  e é estritamente crescente em  $[-1, 1]$ ;  $-\frac{1}{2}$  é um mínimo relativo em  $-1$ ;  $\frac{1}{2}$  é um máximo relativo em  $1$ .

82.

$$a) f(x) = (4x^2 - 16x + 3)' = 8x - 16$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
<b>Sinal de <math>f'</math></b>	-	0	+
<b>Variação de <math>f</math></b>	$\searrow$	Mín. -13	$\nearrow$

$$f(2) = 16 - 32 + 3 = -13$$

$f$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, 2]$  e é estritamente crescente em  $[2, +\infty[$ ; -13 é um mínimo absoluto em 2.

$$b) h'(x) = \left(2x + \frac{4}{x}\right)' = 2 - \frac{4}{x^2}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}) \wedge x \neq 0$$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
<b>Sinal de <math>h'</math></b>	+	0	-	n.d.	-	0	+
<b>Variação de <math>h</math></b>	$\nearrow$	Máx. $-4\sqrt{2}$	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	Mín. $4\sqrt{2}$	$\nearrow$

$$h(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + \frac{4}{-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$$

$$h(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$h$  é estritamente crescente em  $]-\infty, -\sqrt{2}]$  e em  $[\sqrt{2}, +\infty[$  e é estritamente decrescente em  $[-\sqrt{2}, 0[$  e em  $]0, \sqrt{2}]$ ;  $-4\sqrt{2}$  é um máximo relativo em  $-\sqrt{2}$ ;  $4\sqrt{2}$  é um mínimo relativo em  $\sqrt{2}$ .

$$c) p'(x) = (\sqrt{x^2 + 4})' = (x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}' = \frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \wedge \sqrt{x^2 + 4} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
<b>Sinal de <math>p'</math></b>	-	0	+
<b>Variação de <math>p</math></b>	$\searrow$	Mín. 2	$\nearrow$

$$p(0) = \sqrt{4} = 2$$

$p$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, 0]$  e é estritamente crescente em  $[0, +\infty[$ ; 2 é o mínimo absoluto em 0.

$$d) r'(x) = \left(\frac{4}{x^2 + 1}\right)' = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$r'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x = 0 \wedge (x^2 + 1)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
<b>Sinal de <math>r'</math></b>	+	0	-
<b>Variação de <math>r</math></b>	$\nearrow$	Máx. 4	$\searrow$

$$r(0) = \frac{4}{1} = 4$$

$r$  é estritamente crescente em  $]-\infty, 0]$  e é estritamente decrescente em  $[0, +\infty[$ ; 4 é o máximo absoluto em 0.

83.

$$a) t.v.m._{[0, 20]} = \frac{d(20) - d(0)}{20 - 0} = \frac{247 - 7}{20} = 12$$

Nos primeiros 20 minutos a velocidade média do balão foi 12 m/min.

$$b) d'(t) = (-0,02t^3 + t^2 + 7)' = -0,06t^2 + 2t$$

$$d'(5) = -0,06 \times 25 + 2 \times 5 = 8,5$$

A velocidade instantânea relativamente ao solo do balão aos 5 minutos era de 8,5 m/min.

$$c) d'(t) = 0 \Leftrightarrow -0,06t^2 + 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow t(-0,06t + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee -0,06t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{100}{3}$$

$t$	0		$\frac{100}{3}$		50
<b>Sinal de <math>d'</math></b>	0	+	0	-	-
<b>Variação de <math>d</math></b>	Mín. 7	$\nearrow$	Máx. 377	$\searrow$	Mín. 7

$$d\left(\frac{100}{3}\right) \approx 377$$

$$\frac{100}{3} \approx 33$$

O balão atinge a altura máxima de 377 metros aos 33 minutos.

$$84. f(q) = \frac{C(q)}{q}$$

$$f'(q) = \left( \frac{2q^2 - 15q + 3200}{q} \right)' = \frac{(4q - 15)q - (2q^2 - 15q + 3200)}{q^2} = \frac{4q^2 - 15q - 2q^2 + 15q - 3200}{q^2} = \frac{2q^2 - 3200}{q^2}$$

$$f'(q) = 0 \Leftrightarrow \frac{2q^2 - 3200}{q^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2q^2 - 3200 = 0 \wedge q^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow q^2 = 1600 \wedge q \neq 0$$

$$\Leftrightarrow q = 40 \vee q = -40$$

q	0		40	+
Sinal de f'	n.d.	-	0	+
Variação de f	n.d.	↘	Mín. 145	↗

$$f(40) = \frac{C(40)}{40} = 145$$

O custo médio é mínimo para  $q = 40$  unidades.

85.

a) A base da caixa é um quadrado de lado  $6 - 2x$  e a altura da caixa é  $x$ . Logo:

$$V(x) = (6 - 2x)^2 x = (36 - 24x + 4x^2)x = 4x^3 - 24x^2 + 36x, \text{ com } x \in ]0, 3[.$$

b)  $V'(x) = (4x^3 - 24x^2 + 36x)' = 12x^2 - 48x + 36$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 48x + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

x	0		1		3
Sinal de V'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de V	n.d.	↗	Máx. 16	↘	n.d.

$$V(1) = 4 - 24 + 36 = 16$$

O volume da caixa é máximo quando  $x = 1$  e, nesse caso, o volume da caixa é  $16 \text{ cm}^3$ .

86.  $A(x) = 2x(1 - x^2) = 2x - 2x^3$ , com  $x \in ]0, 1[$ .

$$A'(x) = (2x - 2x^3)' = 2 - 6x^2$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 6x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de A	n.d.	↗	Máx. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$	↘	n.d.

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

O valor máximo da área é  $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ .

87.  $12 \text{ l} = 12 \text{ dm}^3$

$$V = \pi r^2 \times h, \text{ logo } \pi r^2 \times h = 12 \Leftrightarrow h = \frac{12}{\pi r^2}.$$

$$\text{Assim, } A(r) = 2\pi r \times \frac{12}{\pi r^2} + 2 \times \pi r^2 = \frac{24}{r} + 2\pi r^2, r > 0.$$

$$A'(r) = \left(\frac{24}{r} + 2\pi r^2\right)' = -\frac{24}{r^2} + 4\pi r$$

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow -\frac{24}{r^2} + 4\pi r = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-24 + 4\pi r^3}{r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -24 + 4\pi r^3 = 0 \wedge r^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{6}{\pi} \wedge r \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$		+
Sinal de A'	n.d.	-	0	+	
Variação de A	n.d.	↘	Mín.	↗	

A medida do raio da base deverá ser  $\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \text{ dm}$ .

88. Seja  $[ABCD]$  um retângulo nas condições do enunciado.

O triângulo  $[ABC]$  é um triângulo retângulo, uma vez que está inscrito numa semicircunferência.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{CB}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{CB}^2 = 100 - \overline{AB}^2$$

$$\text{Logo, } \overline{CB} = \sqrt{100 - \overline{AB}^2}.$$

Sendo  $\overline{AB} = x$ , a área do retângulo  $[ABCD]$  é dada por  $A(x) = x\sqrt{100 - x^2}$ , com  $x \in ]0, 10[$ .

$$\begin{aligned} A'(x) &= (x\sqrt{100 - x^2})' = \\ &= \sqrt{100 - x^2} + x \left( (100 - x^2)^{\frac{1}{2}} \right)' = \\ &= \sqrt{100 - x^2} + x \times \frac{1}{2} (100 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) = \\ &= \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \\ &= \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \\ &= \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \wedge \sqrt{100 - x^2} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 50 \wedge x \in D_A \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{50} \end{aligned}$$

$x$	0		$\sqrt{50}$		10
Sinal de $A'$	n.d.	+	0	-	n.d.
Varição de $A$	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

O retângulo de área máxima é o quadrado de lado  $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ .

## Aprende Fazendo

### Páginas 122 a 132

1. Os pontos de coordenadas  $(1, 0)$  e  $(0, -2)$  pertencem à reta  $t$ .

Então:

$$m_t = \frac{0 + 2}{1 - 0} = 2 = f'(0)$$

A opção correta é a (C).

2. A afirmação (I) é falsa.

Contraexemplo:  $f(x) = |x|$

$f$  é contínua em  $x = 0$ , mas não é diferenciável em  $x = 0$ .

A afirmação (II) é verdadeira.

A opção correta é a (C).

- 3.

a) t.v.m.<sub>[0, 3]</sub> =  $\frac{S(3) - S(0)}{3 - 0} = \frac{18 - 0}{3} = 6$

A velocidade média, nos primeiros três segundos após o lançamento da bola, é 6 m/s.

A opção correta é a (B).

b)  $S'(t) = (-6t^2 + 24t)' = -12t + 24$

$$S'(1) = -12 + 24 = 12$$

A velocidade da bola ao fim de um segundo é 12 m/s.

A opção correta é a (C).

4.  $f(x) = (kx^3 - 2kx^2)' = 3kx^2 - 4kx$

O declive da reta de equação  $y = 2x - 1$  é 2, pelo que o declive da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 1 é  $-\frac{1}{2}$ . Logo:

$$f'(1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3k - 4k = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

A opção correta é a (C).

5.  $x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$

O declive da reta de equação  $y = x - 1$  é 1. Logo, o declive da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $A$  é -1.

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left( 3x + 3 + \frac{2}{x} \right)' = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 - \frac{2}{x^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Como  $D_f = \mathbb{R}^+$ , então  $x = 1$ .

A opção correta é a (C).

6. Como o declive da reta de equação  $y = -3x + 2$ , tangente ao gráfico de  $g$  no ponto de abscissa -2, é -3, então  $g'(-2) = -3$ .

Se  $x = -2$ , então  $y = 6 + 2 = 8$ . Logo, as coordenadas do ponto de tangência são  $(-2, 8)$ , e, portanto,  $g(-2) = 8$ . Assim:

$$g'(-2) = -3 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-2 + h) - g(-2)}{h} = -3$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-2 + h) - 8}{h} = -3$$

A opção correta é a (D).

7.  $f(x) = (ax^2 + (a - 1)x - 2)' = 2ax + a - 1$

A abscissa do extremo relativo de  $f$  é um zero de  $f'$ , já que  $f$  é uma função quadrática. Assim:

$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -2a + a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

A opção correta é a (A).

8. Se a reta tangente ao gráfico de  $h$  no ponto de abscissa 3 tem declive igual a 2, então  $h'(3) = 2$ . Como  $h$  é uma função par, então  $h'(-3) = -2$ . A opção correta é a (C).

9.  $m = \tan 120^\circ = -\sqrt{3} = g'(1)$

Então:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = g'(1) \times 1 = -\sqrt{3}$$

A opção correta é a (A).

10. Como a reta de equação  $y = 3x + 1$  é tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $-1$ , tem-se que  $f'(-1) = 3$ .  
Se  $f(x) = x^3 - x$ , então  $f'(x) = 3x^2 - 1$ , e, portanto,  $f'(-1) = 2$ .  
Se  $f(x) = x + x^2$ , então  $f'(x) = 1 + 2x$ , e, portanto,  $f'(-1) = -1$ .  
Se  $f(x) = x^3 + x$ , então  $f'(x) = 3x^2 + 1$ , e, portanto,  $f'(-1) = 4$ .  
Se  $f(x) = x - x^2$ , então  $f'(x) = 1 - 2x$ , e, portanto,  $f'(-1) = 3$ .  
A opção correta é a (D).

11. Para que a função  $f$  seja diferenciável, é necessário que seja contínua.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^3 - x) = a - 1 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + b) = 2 + b$$

Assim:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow a - 1 = 2 + b \Leftrightarrow b = a - 3$$

Por outro lado, tem que se verificar

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax^3 - x - (a - 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(ax^2 + ax + a - 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + ax + a - 1) = 3a - 1 \end{aligned}$$

#### Cálculo auxiliar

	$a$	$0$	$-1$	$-(a - 1)$
$1$	$a$	$a$	$a$	$a - 1$
	$a$	$a$	$a - 1$	$0$

Assim,  $ax^3 - x - (a - 1) = (x - 1)(ax^2 + ax + a - 1)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + b - (a - 1)}{x - 1} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + a - 3 - a + 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 2}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2 \end{aligned}$$

Logo,  $3a - 1 = 2 \Leftrightarrow a = 1$  e, portanto,  $b = -2$ .

A opção correta é a (C).

12. Uma vez que  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} > 0$ , então podemos afirmar que  $f'(2)$  não existe. A opção correta é a (D).

13.  $g'(-2) > 0$  e  $g'(1) < 0$ , logo  $g'(-2) \times g'(1) < 0$ .

$$g'(-2) > 0 \text{ e } g'(3) > 0, \text{ logo } \frac{g'(-2)}{g'(3)} > 0.$$

$$g'(1) < 0 \text{ e } g'(-2) > 0, \text{ logo } \frac{g'(1)}{g'(-2)} < 0.$$

$$g'(-3) > 0 \text{ e } g'(2) = 0, \text{ logo } g'(-3) \times g'(2) = 0.$$

A opção correta é a (B).

14. Na opção (A), tem-se  $h(x) > 0, \forall x \in D_h$  e  $h'(x) > 0, \forall x \in D_h$ , logo  $h(x) \times h'(x) > 0, \forall x \in D_h$ .  
Na opção (B), tem-se  $h(x) < 0, \forall x \in D_h$  e  $h'(x) > 0, \forall x \in D_h$ , logo  $h(x) \times h'(x) < 0, \forall x \in D_h$ .  
Na opção (C), tem-se  $h(x) < 0, \forall x \in D_h$  e  $h'(x) < 0, \forall x \in D_h$ , logo  $h(x) \times h'(x) > 0, \forall x \in D_h$ .  
Na opção (D), tem-se  $h(x) < 0, \forall x \in ]-\infty, 0[$  e  $h'(x) < 0, \forall x \in ]-\infty, 0[$ , logo  $h(x) \times h'(x) > 0, \forall x \in ]-\infty, 0[$ , mas  $h(x) > 0, \forall x \in ]0, +\infty[$  e  $h'(x) < 0, \forall x \in ]0, +\infty[$ , logo  $h(x) \times h'(x) < 0, \forall x \in ]0, +\infty[$ .  
A opção correta é a (B).

15. Apesar de a função  $h'$  não ser contínua em  $x = 1$ , nada se pode concluir quanto à continuidade de  $h$  em  $x = 1$ .

Se  $x < 0$ , então  $h'(x) < 0$ , pelo que a função  $h$  é decrescente em  $]-\infty, 0[$ , logo  $h(-2) > h(-1)$ .

Se  $x > 1$ , então  $h'(x) < 0$ , pelo que a função  $h$  é decrescente em  $]1, +\infty[$ , logo  $h(2) > h(3)$ .

Como  $h'(x) < 0$  se  $x \in ]-\infty, 0[$ ,  $h'(x) > 0$  se  $x \in ]0, 1[$  e  $h'(0) = 0$ , então 0 é um mínimo relativo de  $h$ .

A opção correta é a (C).

16.  $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  e  $f$  é uma função crescente em  $\mathbb{R}$ . No entanto, por observação do gráfico de  $f$ , conclui-se que o declive das retas tangentes a este gráfico aumenta até ao ponto de abscissa 0 e diminui daí em diante, sendo sempre positivo, o que não se encontra representado no gráfico de  $g$ . Logo,  $g$  não pode ser a função derivada da função  $f$ .

A função  $f$  não tem extremos relativos, uma vez que é estritamente crescente.

A função  $g$  tem um mínimo relativo igual a 1.

A função  $f$  pode ser a função derivada da função  $g$ , já que  $f(x) < 0, \forall x \in ]-\infty, 0[$  e  $g$  é decrescente neste intervalo;  $f(x) > 0, \forall x \in ]0, +\infty[$  e  $g$  é crescente neste intervalo;  $f(x) = 0$  e  $g$  tem um mínimo relativo no ponto de abscissa 0.

A opção correta é a (D).

- 17.** A função  $f$  é crescente em  $]-\infty, -2[$  e em  $]1, +\infty[$  e é decrescente em  $]-2, 1[$ . Logo, a função  $f'$  é positiva em  $]-\infty, -2[$  e em  $]1, +\infty[$  e é negativa em  $]-2, 1[$ .

Por observação do gráfico de  $f$ , conclui-se que não existe  $f'(1)$ .

A opção correta é a (D).

- 18.** Como a reta tangente ao gráfico de  $g$  no ponto de abscissa 0 é horizontal, tem-se que  $g'(0) = 0$ .

Como a reta tangente ao gráfico de  $h$  no ponto de abscissa 0 é paralela à reta de equação  $y = -4x - 4$ , tem-se que  $h'(0) = -4$ .

Assim:

$$\begin{aligned} f'(0) &= (g \times h)'(0) = g'(0) \times h(0) + g(0) \times h'(0) = \\ &= 0 \times 1 + (-4) \times 4 = \\ &= -16 \end{aligned}$$

A opção correta é a (A).

- 19.**  $f(x) = (x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

Se  $n$  for ímpar, então  $n - 1$  é par e tem-se  $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , logo  $f$  é crescente em  $\mathbb{R}$ .

A opção correta é a (A).

## 20.

- a)** A função  $f$  não é contínua em  $\mathbb{R}$ , já que não é contínua em  $x = 1$ , pois  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

- b)** A função  $f$  não é diferenciável nos pontos de abscissas 1 e 4.

**c)**  $t.m.v._{[-2, 1]} = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{-3 - 0}{3} = -1$

- d)** Os pontos de coordenadas (0, 12) e (6, 0) pertencem à reta  $t$ . Logo,  $m_t = \frac{12 - 0}{0 - 6} = -2$ .

Assim,  $t: y = -2x + 12$ .

**e)**  $f'(6) = m_t = -2$

## 21.

**a)**  $d'(t) = -4,9 \times 2t + 20 = -9,8t + 20$

$d'(0) = -9,8 \times 0 + 20 = 20$

A velocidade inicial é 20 m/s.

**b)**  $d(t) = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 20t = 0$   
 $\Leftrightarrow t(-4,9t + 20) = 0$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee -4,9t + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{200}{49}$$

$$d'\left(\frac{200}{49}\right) = -9,8 \times \frac{200}{49} + 20 = -20$$

A velocidade com que o objeto atingiu o solo é -20 m/s.

**c)**  $d'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{100}{49}$

$t$	0		$\frac{100}{49}$		$\frac{200}{49}$
Sinal de $d'$	+	+	0	-	-
Variação de $d$	Mín.	$\nearrow$	Máx. 20,4	$\searrow$	Mín.

$$d\left(\frac{100}{49}\right) = -4,9 \times \left(\frac{100}{49}\right)^2 + 20 \times \frac{100}{49} \approx 20,4$$

O objeto atinge a altura máxima de 20,4 metros, aproximadamente.

## 22.

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3 - 2x} - 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt{3 - 2x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{3 - 2x} + 1}{\sqrt{3 - 2x} + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - 2x - 1}{(x - 1)(\sqrt{3 - 2x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 2x}{(x - 1)(\sqrt{3 - 2x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{3 - 2x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{\sqrt{3 - 2x} + 1} = \\ &= \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

- b)** Seja  $\alpha$  a inclinação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 1.

$\text{tg } \alpha = -1$

Logo,  $\alpha = 135^\circ$ .

## 23.

- a)** A função  $f$  é diferenciável no ponto de abscissa -1, já que a reta tangente ao gráfico de  $f$  neste ponto tem declive igual a -3. Logo, a função  $f$  é contínua em  $x = -1$  e, portanto,  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 2$ .

**b)**  $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = 2 \\ f'(-1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + c = 2 \\ -2a + b = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -a - b \\ a - b - a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b = 2 \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ -2a - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ -2a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Logo,  $f(x) = x^2 - x$ .

**24.**

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= ((1-x)^3(3-x^2))' = \\ &= ((1-x)^3)'(3-x^2) + (1-x)^3(3-x^2)' = \\ &= 3(1-x)^2(-1)(3-x^2) + (1-x)^3(-2x) = \\ &= (1-x)^2(-3(3-x^2) - 2x(1-x)) = \\ &= (1-2x+x^2)(5x^2-2x-9) = \\ &= 5x^4 - 12x^3 + 16x - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \left( \frac{1}{x\sqrt{x}} \right)' = \left( x^{-\frac{3}{2}} \right)' = \\ &= -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} = \\ &= -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(x) &= \left( \frac{2x^3 - 12x + 1}{1+x^2} \right)' = \\ &= \frac{(2x^3 - 12x + 1)'(1+x^2) - (2x^3 - 12x + 1)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{(6x^2 - 12)(1+x^2) - (2x^3 - 12x + 1)2x}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{2x^4 + 18x^2 - 2x - 12}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f'(x) &= \left( \frac{4}{x^2} + \sqrt{2x-x^2} \right)' = \\ &= \left( \frac{4}{x^2} \right)' + \left( (2x-x^2)^{\frac{1}{2}} \right)' = \\ &= \frac{-4 \times 2x}{x^4} + \frac{1}{2} (2x-x^2)^{-\frac{1}{2}} (2-2x) = \\ &= -\frac{8}{x^3} + \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } f'(x) &= \left( \left( \frac{x+1}{2+3x} \right)^4 \right)' = \\ &= 4 \left( \frac{x+1}{2+3x} \right)^3 \left( \frac{x+1}{2+3x} \right)' = \\ &= 4 \left( \frac{x+1}{2+3x} \right)^3 \frac{2+3x - (x+1) \times 3}{(2+3x)^2} = \\ &= 4 \times \frac{(x+1)^3}{(2+3x)^3} \times \frac{-1}{(2+3x)^2} = \\ &= \frac{-4(x+1)^3}{(2+3x)^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } f'(x) &= (\sqrt[4]{1+x^4})' = \left( (1+x^4)^{\frac{1}{4}} \right)' = \\ &= \frac{1}{4} (1+x^4)^{-\frac{3}{4}} (4x^3) = \\ &= \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} \end{aligned}$$

**25.**

$$\begin{aligned} \text{a) } h'(x) &= \left( \left( -\frac{1}{x-1} \right)^2 \right)' = \\ &= 2 \left( -\frac{1}{x-1} \right) \left( -\frac{0-1(x-1)'}{(x-1)^2} \right) = \\ &= -\frac{2}{x-1} \times \frac{1}{(x-1)^2} = \\ &= -\frac{2}{(x-1)^3}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{aligned}$$

$$\text{b) } m = \frac{h(0) - h(-1)}{0 - (-1)} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } h'(x) &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{2}{(x-1)^3} = \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^3 = -\frac{8}{3} \\ &\Leftrightarrow x-1 = -\sqrt[3]{\frac{8}{3}} \\ &\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt[3]{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

Logo,  $x \approx -0,39$ .

$$h\left(1 - \sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right) \approx 0,52$$

Assim,  $C(-0,39; 0,52)$ .

**26.**

**a)** Como  $g$  é diferenciável para  $x = 1$ , então  $g$  é contínua em  $x = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= (\sqrt[3]{x^2+7})' = \left( (x^2+7)^{\frac{1}{3}} \right)' = \\ &= \frac{1}{3} (x^2+7)^{-\frac{2}{3}} (2x) = \\ &= \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+7)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \left( \frac{f}{g} \right)'(1) &= \frac{f'(1) \times g(1) - f(1) \times g'(1)}{g^2(1)} = \\ &= \frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{64}} \times (-2) - \sqrt[3]{8} \times (-2)}{(-2)^2} = \\ &= \frac{-\frac{4}{12} + 4}{4} = \frac{11}{12} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{ii)} (f \circ g)'(1) &= f'(g(1))g'(1) = f'(-2) \times (-2) = \\ &= \frac{-4}{3\sqrt[3]{121}} \times (-2) = \\ &= \frac{8}{3\sqrt[3]{121}} \end{aligned}$$

27.

$$\begin{aligned} \text{a)} f(x) &= \left( \frac{3x^2 + 3}{x^2} \right)' = \\ &= \frac{6x \times x^2 - (3x^2 + 3) \times 2x}{x^4} = \\ &= \frac{-6x}{x^4} = -\frac{6}{x^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} D_f &= \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ logo se } x \in D_f, \text{ então } -x \in D_f. \\ f(-x) &= \frac{3(-x)^2 + 3}{(-x)^2} = \frac{3x^2 + 3}{x^2} = f(x), \forall x \in D_f \end{aligned}$$

Logo,  $f$  é uma função par.

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ logo se } x \in D_f, \text{ então } -x \in D_f. \\ f(-x) &= -\frac{6}{(-x)^3} = -\frac{6}{-x^3} = \frac{6}{x^3} = -f(x), \forall x \in D_f \end{aligned}$$

Logo,  $f$  é uma função ímpar.

$$\begin{aligned} \text{c)} f(x) = 6 &\Leftrightarrow \frac{3x^2 + 3}{x^2} = 6 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x^2 + 3}{x^2} - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x^2 + 3 - 6x^2}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3x^2 + 3}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$f(1) = -\frac{6}{1^3} = -6$$

$$f(-1) = -\frac{6}{(-1)^3} = 6$$

Logo, as retas tangentes ao gráfico da função nos pontos cuja ordenada é 6 não são paralelas porque não têm declives iguais.

$$\text{d)} f'(x) = -\frac{6}{x^3}$$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
<b>Sinal de <math>f'</math></b>	+	n.d.	-
<b>Variação de <math>f</math></b>	$\nearrow$	n.d.	$\searrow$

A função  $f$  é estritamente crescente em  $]-\infty, 0[$  e é estritamente decrescente em  $]0, +\infty[$ ; não tem extremos relativos.

28.

$$\text{a)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2) = 0$$

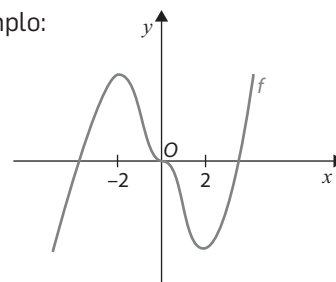
b) A proposição é falsa.

$x$	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
<b>Sinal de <math>f'</math></b>	+	0	-	0	-	0	+
<b>Variação de <math>f</math></b>	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$		$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

A função  $f$  tem dois extremos relativos.

c) A função  $f$  é estritamente crescente em  $]-\infty, -2]$  e em  $[2, +\infty[$  e é estritamente decrescente em  $[-2, 2]$ ; tem um máximo em  $x = -2$  e um mínimo em  $x = 2$ .

d) Por exemplo:



29.

$$\text{a)} f(x) = \frac{x^2 - x}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2-4)} = \frac{x}{x^2-4}$$

**Cálculo auxiliar**

	1	-1	-4	4
1		1	0	-4
	1	0	-4	0

Assim,  $x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4)$ .

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x^2 - 4x + 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus [-2, 1, 2]$$

**Cálculo auxiliar**

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x^2-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x-1 = 0 \vee x^2-4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} f'(x) &= \left( \frac{x}{x^2-4} \right)' = \frac{x^2-4-x \times 2x}{(x^2-4)^2} = \\ &= \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\} \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	-2		0		1		2	$+\infty$
$x$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x^2-4$	+	0	-	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	-	n.d.	+	0	-	n.d.	-	n.d.	+
$f'(x)$	-	n.d.	-	-	-	n.d.	-	n.d.	-
$f(x) \times f'(x)$	+	n.d.	-	0	+	n.d.	+	n.d.	-

Logo,  $f(x) \times f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2[ \cup [0, 1[ \cup ]1, 2[$ .

### c) Assíntotas verticais

A função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$ , por se tratar de uma função racional. Portanto, as retas de equações  $x = -2$ ,  $x = 1$  e  $x = 2$  são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 4} = -\frac{1}{3}$$

A reta de equação  $x = 1$  não é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação  $x = -2$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação  $x = 2$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

### Assíntotas não verticais

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \frac{4}{x}} = 0$$

A reta de equação  $y = 0$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

Quando  $x \rightarrow -\infty$ , os cálculos são idênticos e, portanto, também se obtém a mesma reta.

30.

$$\begin{aligned} \text{a) } g'(x) &= \left( \frac{mx^2}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2mx(x^2 + 1) - mx^2 \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{2mx}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Se  $m > 0$ ,  $g'(x) < 0$  para  $x < 0$  e  $g'(x) > 0$  para  $x > 0$  e, portanto,  $g$  tem um mínimo relativo.

Se  $m < 0$ ,  $g'(x) > 0$  para  $x < 0$  e  $g'(x) < 0$  para  $x > 0$  e, portanto,  $g$  tem um máximo relativo.

Assim, seja qual for o valor de  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , a função tem sempre um extremo relativo.

$$\text{b) } g(x) = \frac{-x^2}{x^2 + 1}$$

$$\text{i) } g'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x = 0 \wedge (x^2 + 1)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
<b>Sinal de <math>g'</math></b>	$+$	$0$	$-$
<b>Variação de <math>g</math></b>	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

A função  $g$  é estritamente crescente em  $]-\infty, 0]$  e é estritamente decrescente em  $[0, +\infty[$ ; tem um máximo relativo em  $x = 0$ .

### ii) Assíntotas verticais

$$D_g = \mathbb{R}$$

A função  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , por se tratar de uma função racional, logo o gráfico de  $g$  não possui assíntotas verticais.

### Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-x^2}{x^2 + 1}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^3 + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2 \left( x + \frac{1}{x} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + \frac{1}{x}} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2 + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1 + \frac{1}{x^2}} = -1 \end{aligned}$$

A reta de equação  $y = -1$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $g$ .

Quando  $x \rightarrow -\infty$ , os cálculos são idênticos e, portanto, também se obtém a mesma reta.

iii) Tendo em conta que a função  $g$  é estritamente crescente em  $]-\infty, 0]$ , é estritamente decrescente em  $[0, +\infty[$  e tem um máximo relativo em  $x = 0$ , não há assíntotas verticais ao gráfico de  $g$  e a reta de equação  $y = -1$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $g$  quando  $x \rightarrow -\infty$  e quando  $x \rightarrow +\infty$ , então  $D'_g = ]-1, 0]$ .

31.

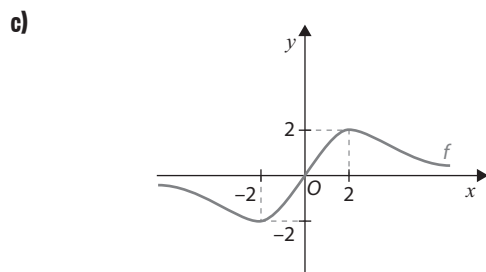
a) Como  $f(x) < 0$  se  $x \in ]-\infty, -2[$  e  $f(x) > 0$  se  $x \in ]-2, 0]$ , e  $f$  é ímpar, então  $f(x) < 0$  se  $x \in ]2, +\infty[$  e  $f(x) > 0$  se  $x \in [0, 2[$ . Assim, a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ , por se ter derivada finita em todos os pontos deste conjunto. Tem-se também que  $f(2) = 0$ , logo  $f(-2) = 0$ , por  $f$  ser uma função ímpar. Logo,  $f$  é diferenciável em  $x = 2$  e em  $x = -2$ , pelo que é contínua nestes pontos.

Conclui-se, assim, que  $f$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}$ .

b)

$x$	$-\infty$	$-2$		$2$	$+\infty$
Sinal de $f'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
Variação de $f$	$\searrow$	Mín. $-2$	$\nearrow$	Máx. $2$	$\searrow$

A função  $f$  tem um mínimo relativo  $-2$  em  $x = -2$  e tem um máximo relativo  $2$  em  $x = 2$ .



32.

**a) Continuidade**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 - 3x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$g(0) = 0$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$ , então a função  $g$  é contínua no ponto de abscissa 0.

**Diferenciabilidade**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 3) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ , então a função  $g$  não é diferenciável no ponto de abscissa 0.

b) Se  $x < 0$ :

$$g'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$$

Se  $x > 0$ :

$$g'(x) = x' = 1$$

De acordo com a alínea anterior,  $g$  não é diferenciável no ponto de abscissa 0.

$$\text{Logo, } g'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Se  $x < 0$ :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

A função  $g'$  tem um zero em  $x = -1$ .

$x$	$-\infty$	$-1$		$0$	$+\infty$
Sinal de $g'$	$+$	$0$	$-$	n.d.	$+$
Variação de $g$	$\nearrow$	Máx. $2$	$\searrow$	Mín. $0$	$\nearrow$

A função  $g$  é estritamente crescente em  $]-\infty, -1]$  e em  $[0, +\infty[$  e é estritamente decrescente em  $[-1, 0]$ ; tem um máximo relativo  $2$  em  $x = -1$  e tem um mínimo relativo  $0$  em  $x = 0$ .

33.

a)  $f(0) = |0^3| = 0$

O ponto de interseção com o eixo  $Oy$  é o ponto de coordenadas  $(0, 0)$ .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow |x^3| = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

O ponto de interseção com o eixo  $Ox$  é o ponto de coordenadas  $(0, 0)$ .

b)  $f(x) = |x^3| = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

c) Se  $x > 0$ , a função  $f$  é contínua, por se tratar de uma função polinomial.

Se  $x < 0$ , a função  $f$  é contínua, por se tratar de uma função polinomial.

Se  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^3) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 0$$

$$f(0) = 0$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , então a função  $f$  é contínua para  $x = 0$ .

Assim,  $f$  é contínua em todo o seu domínio ( $\mathbb{R}$ ).

d) Se  $x > 0$ , então  $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$ .

Se  $x < 0$ , então  $f'(x) = (-x^3)' = -3x^2$ .

Se  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ , então a função  $f$  é diferenciável em  $x = 0$ .

Assim,  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ .

e)  $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -3x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

A função  $f'$  tem apenas um zero em  $x = 0$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
Sinal de $f'$	$-$	$0$	$+$
Variação de $f$	$\searrow$	Mín. $0$	$\nearrow$

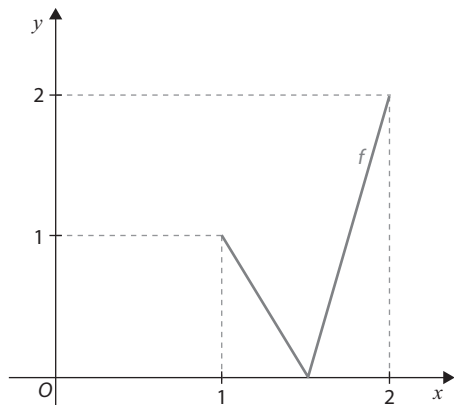
A função  $f$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, 0]$  e é estritamente crescente em  $[0, +\infty[$ ; tem um mínimo relativo 0 em  $x = 0$ .

34.

a) i) A afirmação é falsa.

Contraexemplo:

Seja  $f$  a função cuja representação gráfica é a que se segue.

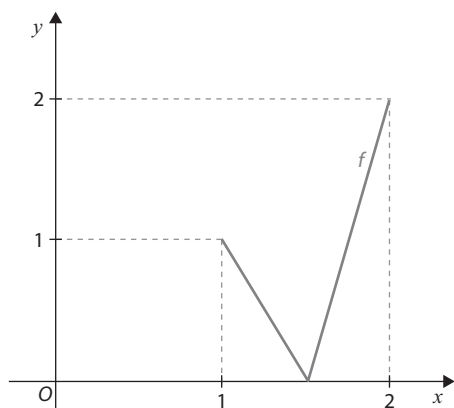


$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2 - 1}{1} = 1$ , mas  $f$  não é crescente no intervalo  $[1, 2]$ .

ii) A afirmação é falsa.

Contraexemplo:

Seja  $f$  a função cuja representação gráfica é a que se segue.



Se  $a = 1$  e  $b = 2$ , verifica-se que  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 1$ , mas  $f(a) < f(b)$ .

b) Nada se pode concluir acerca da monotonia da função em  $[a, b]$ , como vimos nas alíneas anteriores.

35.

a) Seja  $x$  a medida da aresta da base do depósito e  $h$  a medida da sua altura.

$$V = x \times x \times h \Leftrightarrow 2 = x^2 h$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{2}{x^2}$$

Assim:

$$A(x) = x \times x + 4 \times x \times \frac{2}{x^2} = x^2 + \frac{8}{x} = \frac{8}{x} + x^2$$

$$b) A'(x) = \left( \frac{8}{x} + x^2 \right)' = -\frac{8}{x^2} + 2x$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{8}{x^2} + 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{-8 + 2x^3}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -8 + 2x^3 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 4 \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$$

$x$	0		$\sqrt[3]{4}$	$+\infty$
Sinal de $A'$	n.d.	-	0	+
Variação de $A$	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Para que a área total seja mínima, a aresta da base deve medir  $\sqrt[3]{4}$  m.

36.

$$a) C(100) = 0,48 \times 100 + 1500 + \frac{120\,000}{100} = 2748$$

100 unidades de produto têm um custo de produção de 2748 unidades monetárias.

$$b) t.m.v._{[1000, 2000]} = \frac{C(2000) - C(1000)}{2000 - 1000} =$$

$$= \frac{2520 - 2100}{1000} =$$

$$= 0,42$$

$$c) C'(x) = \left( 0,48x + 1500 + \frac{120\,000}{x} \right)' =$$

$$= 0,48 - \frac{120\,000}{x^2}$$

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 0,48 - \frac{120\,000}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,48x^2 - 120\,000}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0,48x^2 - 120\,000 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -500 \vee x = 500$$

$x$	0		500		6000
Sinal de $C'$	-	-	0	+	+
Variação de $C$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.

Para que o custo total seja mínimo, a fábrica deve produzir 500 unidades por mês.

37. Seja  $r$  a medida do raio do setor circular.

$$r + r + \alpha r = 60 \Leftrightarrow \alpha r = 60 - 2r \Leftrightarrow \alpha = \frac{60 - 2r}{r}$$

$$A(r) = \frac{1}{2} r^2 \times \frac{60 - 2r}{r} = 30r - r^2$$

$$A'(r) = 30 - 2r$$

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow 30 - 2r = 0 \Leftrightarrow r = 15$$

$r$	0		15		30
Sinal de $A'$	+	+	0	-	-
Variação de $A$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.

Para que a área do setor circular seja máxima, a medida do raio deve ser 15 cm.

- 38.** Seja  $r$  a medida do raio da base do cone e  $h$  a sua altura. Pelo Teorema de Pitágoras:

$$25^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow h^2 = 625 - r^2$$

$$\text{Logo, } h = \sqrt{625 - r^2}.$$

Então:

$$V(r) = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times \sqrt{625 - r^2} = \frac{\pi r^2 \sqrt{625 - r^2}}{3}$$

$$\begin{aligned} V'(r) &= \left( \frac{\pi r^2 \sqrt{625 - r^2}}{3} \right)' = \\ &= \frac{\pi}{3} \left( 2r \sqrt{625 - r^2} - r^2 \left( (625 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \right)' \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \left( 2r \sqrt{625 - r^2} - r^2 \frac{1}{2} (625 - r^2)^{-\frac{1}{2}} 2r \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \left( 2r \sqrt{625 - r^2} - \frac{r^3}{\sqrt{625 - r^2}} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \times \frac{2r(625 - r^2) - r^3}{\sqrt{625 - r^2}} \\ &= \frac{\pi}{3} \times \frac{1250r - 2r^3 - r^3}{\sqrt{625 - r^2}} \\ &= \frac{\pi}{3} \times \frac{1250r - 3r^3}{\sqrt{625 - r^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V'(r) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \times \frac{1250r - 3r^3}{\sqrt{625 - r^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1250r - 3r^3 = 0 \wedge \sqrt{625 - r^2} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow r(1250 - 3r^2) = 0 \wedge 625 - r^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (r = 0 \vee 1250 - 3r^2 = 0) \wedge r \neq 25 \wedge r \neq -25 \\ &\Leftrightarrow r = 0 \vee r = \sqrt{\frac{1250}{3}} \vee r = -\sqrt{\frac{1250}{3}} \\ &\Leftrightarrow r = 0 \vee r = 25\sqrt{\frac{2}{3}} \vee r = -25\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$r$	0		$25\sqrt{\frac{2}{3}}$		25
Sinal de $V'$	+	+	0	-	-
Variação de $V$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.

Para que a embalagem tenha capacidade máxima, a medida do raio da base deve ser  $25\sqrt{\frac{2}{3}}$  cm.

- 39.** Seja  $P(x, f(x))$  um ponto do gráfico da função  $f$ .

Seja  $A(1, 0)$ .

$$\begin{aligned} d(x) = \overline{AP} &= \sqrt{(x-1)^2 + (f(x)-0)^2} = \\ &= \sqrt{(x-1)^2 + (\sqrt{x^2+1})^2} = \\ &= \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x^2 + 1} = \\ &= \sqrt{2x^2 - 2x + 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d'(x) &= (\sqrt{2x^2 - 2x + 2})' = \\ &= (2x^2 - 2x + 2)^{\frac{1}{2}}' = \\ &= \frac{1}{2} (2x^2 - 2x + 2)^{-\frac{1}{2}} (4x - 2) = \\ &= \frac{2x - 1}{\sqrt{2x^2 - 2x + 2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2x - 1}{\sqrt{2x^2 - 2x + 2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \wedge \underbrace{\sqrt{2x^2 - 2x + 2} \neq 0}_{\text{Condição universal em } \mathbb{R}} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Sinal de $d'$	-	0	+
Variação de $d$	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

O ponto do gráfico de  $f$  cuja distância ao ponto  $A$  é mínima tem coordenadas  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ .

$$\begin{aligned} 40. g'(x) &= \left( x \times f\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = \\ &= x' f\left(\frac{1}{x}\right) + x \left( f\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = \\ &= f\left(\frac{1}{x}\right) + x f'\left(\frac{1}{x}\right) \left( \frac{1}{x} \right)' = \\ &= f\left(\frac{1}{x}\right) + x f'\left(\frac{1}{x}\right) \left( -\frac{1}{x^2} \right) = \\ &= f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} f'\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} g'(-1) &= f\left(\frac{1}{-1}\right) - \frac{1}{-1} f'\left(\frac{1}{-1}\right) = \\ &= f(-1) + f'(-1) = \\ &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

## Tema V - Estatística

### Unidade 2 - Retas de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficientes de correlação

Páginas 137 a 157

1.

a) A variável explicativa é "idade" e a variável resposta é "percentagem de massa muscular".

b) A variável explicativa é "temperatura ambiental" e a variável resposta é "comprimento da barra".

2.

a) O desvio vertical do ponto  $(x_i, y_i)$  em relação à reta  $r: y = 1,2x + 0,3$  é dado por  $e_i = y_i - 1,2x_i - 0,3$ .

Assim:

$$\text{Ponto A: } e_1 = 2,1 - 1,2 \times 1 - 0,3 = 0,6$$

$$\text{Ponto B: } e_2 = 2,5 - 1,2 \times 2 - 0,3 = -0,2$$

$$\text{Ponto C: } e_3 = 4,1 - 1,2 \times 3 - 0,3 = 0,2$$

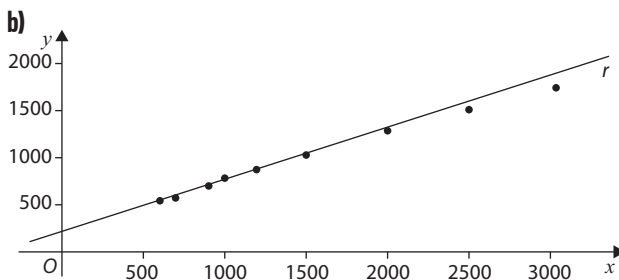
$$\text{Ponto D: } e_4 = 4,8 - 1,2 \times 4 - 0,3 = -0,3$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^4 e_i = 0,6 - 0,2 + 0,2 - 0,3 = 0,3$$

$$\begin{aligned} 3. \sum_{i=1}^n e_i &= 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n ax_i - \sum_{i=1}^n b = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - nb = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + nb \\ &\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = a \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + b \\ &\Leftrightarrow \bar{y} = a\bar{x} + b \end{aligned}$$

Logo, o ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$  pertence à reta  $t: y = ax + b$ .

$$\begin{aligned} 4. \text{a) } \bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^9 x_i}{9} = \\ &= \frac{600 + 700 + 900 + 1000 + 1200 + \\ &\quad + 1500 + 2000 + 2500 + 3000}{9} \approx 1489 \\ \bar{y} &= \frac{\sum_{i=1}^9 y_i}{9} = \\ &= \frac{533 + 568 + 695 + 746 + 869 + \\ &\quad + 1038 + 1282 + 1501 + 1769}{9} \approx 1000 \end{aligned}$$



c) O desvio vertical do ponto  $(x_i, y_i)$  em relação à reta  $t: y = 0,55x + 230$  é dado por  $e_i = y_i - 0,55x_i - 230$ .

Assim:

$$(600, 533): e_1 = 533 - 0,55 \times 600 - 230 = -27$$

$$(700, 568): e_2 = 568 - 0,55 \times 700 - 230 = -47$$

$$(900, 695): e_3 = 695 - 0,55 \times 900 - 230 = -30$$

$$(1000, 746): e_4 = 746 - 0,55 \times 1000 - 230 = -34$$

$$(1200, 869): e_5 = 869 - 0,55 \times 1200 - 230 = -21$$

$$(1500, 1038): e_6 = 1038 - 0,55 \times 1500 - 230 = -17$$

$$(2000, 1282): e_7 = 1282 - 0,55 \times 2000 - 230 = -48$$

$$(2500, 1501): e_8 = 1501 - 0,55 \times 2500 - 230 = -104$$

$$(3000, 1769): e_9 = 1769 - 0,55 \times 3000 - 230 = -111$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \sum_{i=1}^9 e_i &= -27 - 47 - 30 - 34 - 21 - 17 - 48 - 104 - 111 = \\ &= -439 \end{aligned}$$

e) A reta  $t$  não pode ser a reta dos mínimos quadrados, uma vez que a soma dos desvios verticais de cada um dos pontos não é igual a zero.

5.  $S_x = 2$ , logo:

$$S_x^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{SS_x}{n-1} = 4$$

$$\Leftrightarrow SS_x = 4(n-1)$$

$S_y = 5$ , logo:

$$S_y^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{SS_y}{n-1} = 25$$

$$\Leftrightarrow SS_y = 25(n-1)$$

Então:

$$r = 2,3 \sqrt{\frac{4(n-1)}{25(n-1)}} =$$

$$= 2,3 \sqrt{\frac{4}{25}} =$$

$$= 0,92$$

6. Se todos os pontos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  se encontram sobre a reta de equação  $y = mx + b$ , então  $y_i = mx_i + b$ , para todo o  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Pelas propriedades da média e da soma dos desvios, obtemos  $\bar{y} = m\bar{x} + b$  e  $SS_y = m^2 SS_x$ . Desta forma:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(mx_i + b - (m\bar{x} + b))}{\sqrt{SS_x (m^2 SS_x)}} = \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(mx_i - m\bar{x})}{-m\sqrt{SS_x^2}} \text{ (pois } m < 0) \\
 &= -\frac{m}{m} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{SS_x} = \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

7.  $r_1$  corresponde ao gráfico C, uma vez que esta nuvem de pontos parece apresentar uma associação linear negativa fraca.

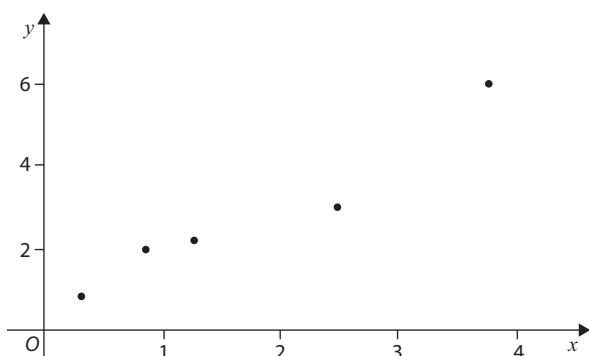
$r_2$  corresponde ao gráfico A, uma vez que esta nuvem de pontos parece apresentar uma associação linear positiva.

$r_3$  corresponde ao gráfico B, uma vez que esta nuvem de pontos parece apresentar uma associação linear negativa forte.

8.

a) A variável explicativa é "taxa de fluxo das águas" e a variável resposta é "quantidade de massa de solo transportado".

b) i)



ii)  $\bar{x} = 1,728$  (2 c.d.)

$\bar{y} = 2,806$

iii)  $a \approx 1,39$  (2 c.d.)

## Aprende Fazendo

Páginas 162 a 170

1.  $\bar{x} = \frac{20 + 34 + 36 + 40}{4} = 32,5$

$\bar{y} = \frac{30 + 40 + 50 + 56}{4} = 44$

$SS_x = (20 - 32,5)^2 + (34 - 32,5)^2 + (36 - 32,5)^2 + (40 - 32,5)^2 = 227$

$SS_y = (30 - 44)^2 + (40 - 44)^2 + (50 - 44)^2 + (56 - 44)^2 = 392$

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \\
 &= \frac{(20 - 32,5)(30 - 44) + (34 - 32,5)(40 - 44) + (36 - 32,5)(50 - 44) + (40 - 32,5)(56 - 44)}{\sqrt{227 \times 392}} \approx \\
 &\approx 0,94
 \end{aligned}$$

A opção correta é a (A).

2. O coeficiente de correlação linear é um número que pertence ao intervalo  $[-1, 1]$ . Tratando-se de uma associação linear negativa forte esse valor está próximo de  $-1$ .

A opção correta é a (C).

3.  $\bar{x} = \frac{21 + 22 + 23 + 24 + 25}{5} = 23$

$\bar{y} = \frac{12,1 + 11,5 + 8,7 + 7,5 + 8,2}{5} = 9,6$

$SS_x = (21 - 23)^2 + (22 - 23)^2 + (23 - 23)^2 + (24 - 23)^2 + (25 - 23)^2 = 10$

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y}}{SS_x} = \\
 &= \frac{21 \times 12,1 + 22 \times 11,5 + 23 \times 8,7 + 24 \times 7,5 + 25 \times 8,2 - 5 \times 23 \times 9,6}{10} \approx -1,18
 \end{aligned}$$

$b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 9,6 + 1,18 \times 23 = 36,74$

A opção correta é a (C).

4.  $y = 0,35x + 307$

$0,35 \times 15 + 307 \approx 312$  patentes

A opção correta é a (D).

5. O coeficiente de correlação linear  $r_1$  corresponde ao gráfico C, uma vez que este é o único que apresenta uma associação linear negativa forte.

O coeficiente de correlação linear  $r_2$  corresponde ao gráfico A, uma vez que este é o único que apresenta uma associação linear positiva.

O coeficiente de correlação linear  $r_3$  corresponde ao gráfico B, uma vez que este é o único que apresenta uma associação linear negativa fraca.

A opção correta é a (A).

6. O coeficiente de correlação linear é um número que pertence ao intervalo  $[-1, 1]$ . Tratando-se de uma associação linear negativa forte esse valor está próximo de  $-1$ .

A opção correta é a (C).

$$7. \bar{x} = \frac{12 + 13 + 16 + 18 + 15 + 10}{6} = 14$$

$$\bar{y} = \frac{25 + 28 + 29 + 32 + 25 + 20}{6} = 26,5$$

$$\text{Tem-se que } \sum_{i=0}^6 e_i = 0 \Leftrightarrow b = \bar{y} - a\bar{x}$$

Assim, procura-se o par ordenado  $(a, b)$  para o qual  $b \neq 26,5 - 14a$ .

$$\text{Na opção (A): } 26,5 - 14 \times 1 = 12,5$$

$$\text{Na opção (B): } 26,5 - 14 \times 1,3 = 8,3 \neq 0,2$$

$$\text{Na opção (C): } 26,5 - 14 \times 1,1 = 11,1$$

$$\text{Na opção (D): } 26,5 - 14 \times 1,5 = 5,5$$

A opção correta é a (B).

$$8. \bar{y} = a\bar{x} + 10 \Leftrightarrow -2 = a \times 3 + 10$$

$$\Leftrightarrow 3a = -12$$

$$\Leftrightarrow a = -4$$

A opção correta é a (A).

9. A afirmação (I) é falsa. Diz-se que as variáveis têm uma associação linear positiva forte quando o coeficiente de correlação é próximo de 1.

A afirmação (II) é verdadeira.

A afirmação (III) é falsa. Sendo  $r$  o coeficiente de correlação linear e  $a$  o declive da reta dos mínimos

quadrados, tem-se que  $r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}$ .

A opção correta é a (B).

10.  $S_x = 3$ , logo:

$$S_x^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{SS_x}{6-1} = 9$$

$$\Leftrightarrow SS_x = 45$$

Assim:

$$r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} \Leftrightarrow 0,85 = a \sqrt{\frac{45}{30}}$$

$$\Leftrightarrow a = 0,85 \times \sqrt{\frac{30}{45}}$$

Logo,  $a \approx 0,7$ .

A opção correta é a (D).

11. A soma dos desvios verticais dos pontos

$P_i (1 \leq i \leq 30)$  em relação à reta  $t: y = ax + b$  é nula, logo  $b = \bar{y} - a\bar{x} \Leftrightarrow \bar{y} = a\bar{x} + b$ , ou seja, o ponto  $P(100, 150)$  pertence à reta  $t$ .

A opção correta é a (D).

12. Sendo  $r: y = ax + b$  a reta dos mínimos quadrados, sabe-se que  $b = \bar{y} - a\bar{x}$ . Então:

$$26,1 = \frac{25 + 21 + 19 + 18 + y_4}{5} + 2,1 \times$$

$$\times \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5}$$

$$\Leftrightarrow 130,5 = 83 + y_4 + 2,1 \times 15$$

$$\Leftrightarrow y_4 = 16$$

A opção correta é a (B).

13. Sendo  $r: y = ax + b$  a reta dos mínimos quadrados, sabe-se que o ponto de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  pertence a  $r$ .

$$\text{Opção (A): } \frac{2}{3} \times 10 + 12 = \frac{56}{3} \neq 15$$

$$\text{Opção (B): } \frac{3}{2} \times 10 + 15 \neq 15$$

$$\text{Opção (C): } \frac{3}{5} \times 10 + 9 = 15$$

$$\text{Opção (D): } \frac{3}{5} \times 10 + 12,5 = 18,5 \neq 15$$

A opção correta é a (C).

14.  $e_1 = y_1 - (ax_1 + b) \Leftrightarrow 0,5 = 5 - (2a + b)$
- $$\Leftrightarrow 4,5 = 2a + b \Leftrightarrow b = 4,5 - 2a$$

$$e_7 = y_7 - (ax_7 + b) \Leftrightarrow -0,1 = 1 - (6a + b)$$

$$\Leftrightarrow 1,1 = 6a + b \Leftrightarrow 1,1 = 6a + 4,5 - 2a$$

$$\Leftrightarrow -3,4 = 4a \Leftrightarrow a = -0,85$$

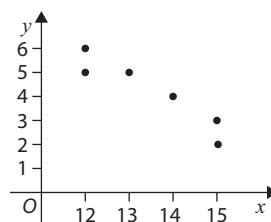
$$\text{Logo, } b = 4,5 - 2 \times (-0,85) = 6,2.$$

Então:

$$e_{15} = y_{15} - (ax_{15} + b) = 2 - (-0,85 \times 4 + 6,2) = -0,8$$

A opção correta é a (A).

- 15.



Esta nuvem de pontos sugere que existe uma associação linear entre as variáveis.

16. Todas as nuvens apresentadas sugerem a existência de associação linear negativa entre as variáveis. Na amostra representada no gráfico A essa associação é a mais fraca e na amostra representada no gráfico C essa associação é a mais forte. Então,  $r_1$  corresponde ao gráfico A,  $r_2$  corresponde ao gráfico C e  $r_3$  corresponde ao gráfico B.



17.

a) A variável explicativa é a variável "massa". A variável resposta é a variável "quantidade de medicamento".

$$b) r = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \frac{15,25}{\sqrt{101,5 \times 2,315}} \approx 0,999$$

Logo, as variáveis têm uma associação linear positiva.

#### Cálculos auxiliares

$$\bullet \bar{x} = \frac{3 + 4 + 5 + 8 + 10 + 15}{6} = 7,5$$

$$\bullet \bar{y} = \frac{0,5 + 0,6 + 0,8 + 1,2 + 1,5 + 2,3}{6} = 1,15$$

$x_i$	$y_i$	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
3	0,5	-4,5	-0,65	2,925	20,25	0,4225
4	0,6	-3,5	-0,55	1,925	12,25	0,3025
5	0,8	-2,5	-0,35	0,875	6,25	0,1225
8	1,2	0,5	0,05	0,025	0,25	0,0025
10	1,5	2,5	0,35	0,875	6,25	0,1225
15	2,3	7,5	1,15	8,625	56,25	1,3225
				$\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 15,25$	$SS_x = 101,5$	$SS_y = 2,315$

$$c) a = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i y_i - 6 \bar{x} \bar{y}}{SS_x} = \frac{3 \times 0,5 + 4 \times 0,6 + 5 \times 0,8 + 8 \times 1,2 + 10 \times 1,5 + 15 \times 2,3 - 6 \times 7,5 \times 1,15}{101,5} \approx 0,15$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 0,02$$

Assim, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é  $y = 0,15x + 0,02$ .

$$d) 0,15 \times 12 + 0,02 = 1,82$$

Uma criança com 12 kg deve tomar, aproximadamente, 1,82 ml de medicamento.

18.

a) A variável explicativa é "número de km" e a variável resposta é "valor da venda".

$$b) r = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \frac{-1544,6667}{\sqrt{237,7683 \times 17\,731,3333}} \approx -0,75$$

Logo, as variáveis têm uma associação linear positiva.

#### Cálculos auxiliares

$$\bullet \bar{x} = \frac{248 + 273 + 145 + 210 + 142 + 270}{6} = \frac{644}{3} \approx 214,6667$$

$$\bullet \bar{y} = \frac{12,5 + 13,9 + 17,5 + 12,5 + 29,9 + 12,2}{6} = \frac{197}{2} \approx 16,4167$$

$x_i$	$y_i$	$x_i y_i$	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$
248	12,5	3100	33,3333	-3,9167
273	13,9	3794,7	58,3333	-2,5167
145	17,5	2537,5	-69,6667	1,0833
210	12,5	2625	-4,6667	-3,9167
142	29,9	4245,8	-72,6667	13,4833
270	12,2	3294	55,3333	-4,2167
		$\sum_{i=1}^6 x_i y_i = 19\,597$		

$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
-130,5556	1111,1111	15,3403
-146,8056	3402,7778	6,3336
-75,4722	4853,4444	1,1736
18,2778	21,7778	15,3403
-979,7889	5280,4444	181,8003
-233,3222	3061,7778	17,7803
$\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -1547,6667$	$SS_x = 17\,731,3333$	$SS_y = 237,7683$

$$c) a = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i y_i - 6 \bar{x} \bar{y}}{SS_x} = \frac{19\,597 - 6 \times 214,6667 \times 16,4167}{17\,731,3333}$$

$$\approx -0,0873 \approx -0,09$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 16,4167 + 0,0873 \times 214,6667 \approx 35,15$$

Assim, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é  $y = -0,09x + 35,15$ .

$$d) x = -0,09 \times 250 + 35,15 \Leftrightarrow x = 12,61$$

Logo,  $x \approx 12,61$ .

O valor da venda de um carro com 250 000 km é de aproximadamente 12,61 milhares de euros.

19.

a) Proposição falsa.

Quando o coeficiente de correlação entre duas variáveis é nulo, podemos concluir que não existe associação linear entre as variáveis, mas nada podemos afirmar sobre quaisquer outros tipos de associação.

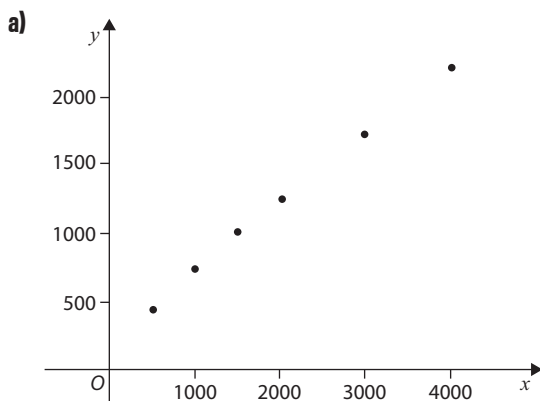
**b)** Proposição falsa.

Um valor do coeficiente de correlação próximo de  $-1$  indica uma associação linear negativa forte entre as variáveis.

**c)** Proposição verdadeira.

O sinal do coeficiente de correlação tem sempre o mesmo sinal do declive da reta dos mínimos quadrados.

**20.**



Esta nuvem de pontos sugere que existe uma associação linear forte entre as variáveis.

**b)** Recorrendo à calculadora gráfica,  $y = 0,5x + 227,8$ .

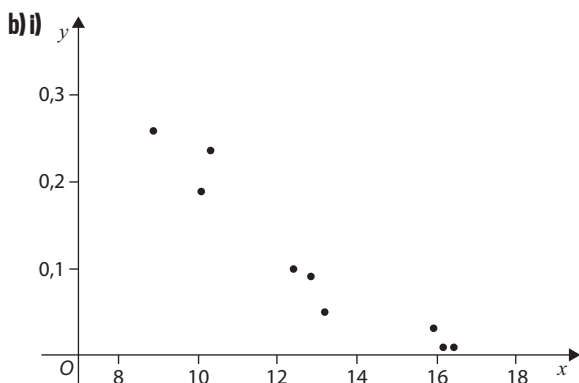
**c)**  $y = 0,5 \times 750 + 227,8 = 602,8$

O valor do ordenado líquido de um funcionário com um ordenado bruto de 750 euros é 602,8 euros.

**d)**  $589 - 602,8 = -13,8$  euros.

**21.**

**a)** A variável explicativa é "temperatura" e a variável resposta é "volume de gás".



A nuvem de pontos parece indicar a existência de uma associação linear negativa entre as variáveis.

**ii)** Recorrendo à calculadora gráfica,  $\bar{x} = 12,9$  e  $\bar{y} = 0,11$ .

**iii)** Recorrendo à calculadora gráfica,  $a \approx 0$ .

**iv)** Recorrendo à calculadora gráfica,  $y = -0,033x + 0,539$ .

**v)**  $y = -0,033 \times 7 + 0,539 = 0,308$

O consumo esperado num mês em que a temperatura média é  $7^\circ\text{C}$  é de aproximadamente  $0,308 \text{ m}^3$ .

**22.**

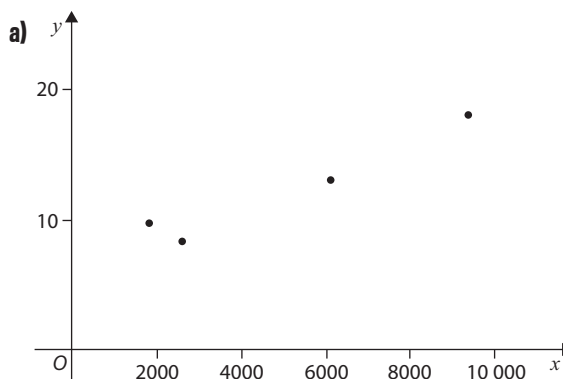
$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \begin{cases} e_1 = y_1 - mx_1 - b \\ e_2 = y_2 - mx_2 - b \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,5 = 8 - m - b \\ -0,3 = 6 - 2m - b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -7,5 + m \\ -0,3 = 6 - 2m - 7,5 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8,7 \\ m = -1,2 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é  $y = -1,2x + 8,7$ .

**b)**  $e_3 = y_3 - mx_3 - b = 5 + 1,2 \times 3 - 8,7 = -0,1$

$e_4 = y_4 - mx_4 - b = 4 + 1,2 \times 4 - 8,7 = 0,1$

**23.**



A nuvem de pontos parece indicar a existência de uma associação linear positiva entre as variáveis.

**b)** Recorrendo à calculadora gráfica,

$y = 0,001x + 6,389$ .

**c)**  $y = 0,001 \times 3000 + 6,389 = 9,389$

R.: 9,389 espetadores

**d)**  $e_1 = 9,9 - (0,001 \times 1787 + 6,389) = 1,724 \approx 1,72$

$e_2 = 18,3 - (0,001 \times 9339 + 6,389) = 2,572 \approx 2,57$

$e_3 = 8,4 - (0,001 \times 2610 + 6,389) = -0,599 \approx -0,60$

$e_4 = 13,2 - (0,001 \times 6095 + 6,389) = 0,716 \approx 0,72$

**e)**  $1,72 + 2,57 - 0,60 + 0,72 = 4,41$

A soma dos desvios não é nula porque o ponto de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  não pertence à reta.

**24.**  $\bar{y} = a\bar{x} - 5 \Leftrightarrow 21 = a \times 4 - 5$

$$\Leftrightarrow 4a = 26$$

$$\Leftrightarrow a = 6,5$$

**25.**  $e_1 = 105 - (a + b)$

$e_2 = 208 - (1,1a + b)$

$e_3 = 209 - (1,6a + b)$

$e_4 = 302 - (1,8a + b)$

$e_5 = 250 - (2a + b)$

$$\sum_{i=1}^5 e_i = 0 \Leftrightarrow 1074 - 7,5a - 5b = 0$$

Se, por exemplo,  $a = 1$ , então  $1074 - 7,5 - 5b = 0$   
 $\Leftrightarrow b = 213,3$ .

Se, por exemplo,  $a = 10$ , então  $1074 - 7,5 - 5b = 0$   
 $\Leftrightarrow b = 199,8$ .

Então, os pares  $(a, b)$  pedidos podem ser  $(1; 213,3)$  e  $(10; 199,8)$ .

- 26.** O coeficiente de correlação é um número pertencente ao intervalo  $[-1, 1]$ , pelo que  $r_2$  não pode ser um coeficiente de correlação.

Uma vez que o declive da reta dos mínimos quadrados relativa a esta amostra é positivo, então o coeficiente de correlação desta amostra tem de ser positivo. Logo,  $r_3$  pode corresponder ao coeficiente de correlação linear desta amostra.

$$\begin{aligned} 27. S_x^2 = 10 &\Leftrightarrow \frac{SS_x}{35-1} = 10 \\ &\Leftrightarrow SS_x = 340 \end{aligned}$$

Assim:

$$r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} = 54 \sqrt{\frac{340}{450}} \approx 0,87$$

- 28.** Como o coeficiente de correlação linear é positivo, o declive da reta dos mínimos quadrados também é positivo. Logo, a reta  $t_2$  não pode ser a reta dos mínimos quadrados desta amostra.

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$

Na reta  $t_1$ :  $60 = 10 + 50$  é uma proposição verdadeira.

Na reta  $t_3$ :  $60 = 10 \times 10 + 30$  é uma proposição falsa.

Logo, a reta  $t_1$  pode ser a reta dos mínimos quadrados desta amostra.

$$\begin{aligned} 29. \bar{y} = 1,8\bar{x} + 16,8 &\Leftrightarrow \frac{14 + 14 + 12 + 10 + y_5 + 6}{6} = \\ &= 1,8 \times \frac{-1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6}{6} + 16,8 \\ &\Leftrightarrow 56 + y_5 = 1,8 \times (-21) + 100,8 \\ &\Leftrightarrow y_5 = 7 \end{aligned}$$

**30.**

- a)** Afirmação falsa.

Há infinitas retas a que pertence o ponto de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

- b)** Afirmação falsa.

O coeficiente de correlação linear é um valor do intervalo  $[-1, 1]$ , logo nunca pode ser inferior a  $-1$ .

- c)** Afirmação verdadeira.

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{15} e_i = 0$$

- d)** Afirmação falsa.

Quando não há associação linear entre as variáveis, a reta dos mínimos quadrados não deve ser utilizada para prever o valor de  $y$  em função de  $x$ .

$$\begin{aligned} 31. \bar{x} = 114 &\Leftrightarrow \frac{100 + 101 + 112 + x_4}{4} = 114 \\ &\Leftrightarrow 313 + x_4 = 456 \\ &\Leftrightarrow x_4 = 143 \end{aligned}$$

$$\bar{y} = 0,05\bar{x} + 0,7 =$$

$$= 0,05 \times 114 + 0,7 =$$

$$= 6,4$$

$$\bar{y} = 6,4 \Leftrightarrow \frac{2,7 + 3,4 + 3,5 + y_4}{4} = 6,4$$

$$\Leftrightarrow 9,6 + y_4 = 25,6$$

$$\Leftrightarrow y_4 = 16$$

Logo,  $(x_4, y_4) = (143, 16)$ .

- 32.** Seja  $m$  o declive da reta dos mínimos quadrados da amostra  $(z, y)$ .

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i y_i - n \bar{z} \bar{y}}{SS_z} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n k x_i y_i - n k \bar{x} \bar{y}}{k^2 SS_x} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{k^2 SS_x} = \\ &= \frac{k \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} \right)}{k^2 SS_x} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{k SS_x} = \\ &= \frac{1}{k} \times \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{SS_x} = \\ &= \frac{1}{k} \times a = \\ &= \frac{a}{k} \end{aligned}$$

- 33.**  $S_x = 1,6$ , logo:

$$S_x^2 = 2,56 \Leftrightarrow \frac{SS_x}{29-1} = 2,56$$

$$\Leftrightarrow SS_x = 71,68$$

$S_y = 3,6$ , logo:

$$S_y^2 = 12,96 \Leftrightarrow \frac{SS_y}{29-1} = 12,96$$

$$\Leftrightarrow SS_y = 362,88$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= a\bar{x} + b \Leftrightarrow 34 = a \times 13 - \frac{45,6}{r} \\ \Leftrightarrow 13a &= 34 + \frac{45,6}{r} \\ \Leftrightarrow 13a &= \frac{34r + 45,6}{r} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{34r + 45,6}{13r}\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}r &= a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{34r + 45,6}{13r} \sqrt{\frac{71,68}{362,88}} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{34r + 45,6}{13r} \times \frac{4}{9} \\ \Leftrightarrow \frac{9r}{4} &= \frac{34r + 45,6}{13r} \quad (r \neq 0) \\ \Leftrightarrow 117r^2 &= 136r + 182,4 \\ \Leftrightarrow 117r^2 - 136r - 182,4 &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{136 \pm \sqrt{136^2 + 4 \times 117 \times 182,4}}{2 \times 117}\end{aligned}$$

Logo,  $r \approx 1,958 \vee r \approx -0,796$ .

Como  $r \in [-1, 1]$ , então  $r \approx -0,796$ .

Logo,  $r \approx -0,8$ .



**09.**

**PROPOSTAS  
DE RESOLUÇÃO**  
**CADERNO DE EXERCÍCIOS  
E TESTES**

Materiais disponíveis em formato fotocopiável e projetável em

**20** AULA DIGITAL  
PROFESSOR



# Tema I - Trigonometria e Funções Trigonométricas

Páginas 10 a 19

1.

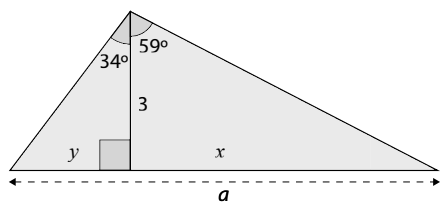
$$1.1. \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2,8}{a} \Leftrightarrow a = \frac{2,8}{\operatorname{tg} 30^\circ}$$

Logo,  $a \approx 4,8$ .

$$1.2. \cos 40^\circ = \frac{8,6}{a} \Leftrightarrow a = \frac{86}{\cos 40^\circ}$$

Logo,  $a \approx 11,2$ .

1.3.



$$\operatorname{tg} 59^\circ = \frac{x}{3} \Leftrightarrow x = 3 \operatorname{tg} 59^\circ$$

$$\operatorname{tg} 34^\circ = \frac{y}{3} \Leftrightarrow y = 3 \operatorname{tg} 34^\circ$$

$$a = 3 \operatorname{tg} 59^\circ + 3 \operatorname{tg} 34^\circ$$

Logo,  $a \approx 7,0$ .

$$1.4. \sin 53^\circ = \frac{a}{5,2} \Leftrightarrow a = 5,2 \sin 53^\circ$$

Logo,  $a \approx 4,2$ .

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b = \frac{5,2 \sin 53^\circ}{\sin 45^\circ}$$

Logo,  $b \approx 5,9$ .

$$1.5. \cos 40^\circ = \frac{a}{5,3} \Leftrightarrow a = 5,3 \cos 40^\circ$$

Logo,  $a \approx 4,1$ .

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{b}{a+2} \Leftrightarrow b = (2 + 5,3 \cos 40^\circ) \operatorname{tg} 40^\circ$$

Logo,  $b \approx 5,1$ .

$$1.6. \operatorname{tg} 51^\circ = \frac{b}{a} \Leftrightarrow b = a \operatorname{tg} 51^\circ$$

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{b}{a+3} \Leftrightarrow b = (a+3) \operatorname{tg} 36^\circ$$

Assim:

$$a \operatorname{tg} 51^\circ = (a+3) \operatorname{tg} 36^\circ$$

$$\Leftrightarrow a \operatorname{tg} 51^\circ - a \operatorname{tg} 36^\circ = 3 \operatorname{tg} 36^\circ$$

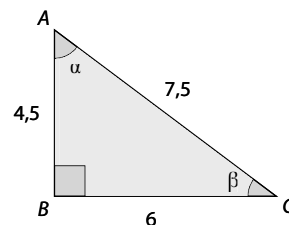
$$\Leftrightarrow a = \frac{3 \operatorname{tg} 36^\circ}{\operatorname{tg} 51^\circ - \operatorname{tg} 36^\circ}$$

Logo,  $a \approx 4,3$ .

$$b = \frac{3 \operatorname{tg} 36^\circ}{\operatorname{tg} 51^\circ - \operatorname{tg} 36^\circ} \operatorname{tg} 51^\circ$$

Logo,  $b \approx 5,3$ .

2.



$$2.1. \overline{AC}^2 = 7,5^2 = 56,25$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 4,5^2 + 6^2 = 20,25 + 36 = 56,25$$

Como  $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ , então, pelo Teorema de Pitágoras, o triângulo  $[ABC]$  é um triângulo retângulo.

$$2.2. \sin \alpha = \frac{6}{7,5} = \frac{4}{5}; \cos \alpha = \frac{4,5}{7,5} = \frac{3}{5}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{4,5} = \frac{4}{3}$$

$$\sin \beta = \frac{4,5}{7,5} = \frac{3}{5}; \cos \beta = \frac{6}{7,5} = \frac{4}{5}; \operatorname{tg} \beta = \frac{4,5}{6} = \frac{3}{4}$$

3.

$$3.1. \sin 45^\circ \times \cos 45^\circ - \cos 60^\circ - \sin 60^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3.2. \sin 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ \times \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \times \operatorname{tg} 45^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3.3. \cos 30^\circ - \sin 60^\circ + \sin 30^\circ - \cos 60^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} =$$

$$= 0$$

$$3.4. \operatorname{tg} 45^\circ + \cos 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ - \sin 45^\circ =$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 1 + \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$$

4.

$$4.1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{5}{9}$$

Uma vez que  $\alpha$  é um ângulo agudo, então  $\cos \alpha > 0$ .

$$\text{Logo, } \cos \alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$



$$4.2. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Logo, } \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \left( \frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^2 + 1 = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5}.$$

5.

$$5.1. 1 - \operatorname{sen}^2 \beta + 2 \cos^2 \beta = 1 - (1 - \cos^2 \beta) + 2 \cos^2 \beta = \\ = 1 - 1 + \cos^2 \beta + 2 \cos^2 \beta = \\ = 3 \cos^2 \beta$$

$$5.2. \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} - \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} = \\ = \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} - \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} = \\ = \frac{1 - \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$5.3. (\operatorname{sen} \beta + \cos \beta)^2 + (\operatorname{sen} \beta - \cos \beta)^2 = \\ = \operatorname{sen}^2 \beta + 2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta + \cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta - \\ - 2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta + \cos^2 \beta = \\ = 2(\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta) = \\ = 2$$

$$5.4. \frac{\operatorname{sen} \beta}{1 + \cos \beta} + \frac{1 + \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} = \\ = \frac{\operatorname{sen} \beta}{1 + \cos \beta} \times \frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos \beta} + \frac{1 + \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} \times \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \beta} = \\ = \frac{\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{1 - \cos^2 \beta} + \frac{\operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{\operatorname{sen}^2 \beta} = \\ = \frac{\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{\operatorname{sen}^2 \beta} + \frac{\operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{\operatorname{sen}^2 \beta} = \\ = \frac{2 \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}^2 \beta} = \\ = \frac{2}{\operatorname{sen} \beta}$$

6.

$$6.1. \cos (\widehat{ABV}) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \overline{AV}}{\overline{AV}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Logo, } \widehat{ABV} = \cos^{-1} \left( \frac{1}{3} \right) \approx 70,5^\circ.$$

$$6.2. \widehat{AVB} = 180^\circ - 2 \times \cos^{-1} \left( \frac{1}{3} \right) \approx 38,9^\circ.$$

6.3. Usando o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \left( \frac{2}{3} \overline{AV} \right)^2 + \left( \frac{2}{3} \overline{AV} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \frac{4}{9} \overline{AV}^2 + \frac{4}{9} \overline{AV}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \frac{8}{9} \overline{AV}^2$$

$$\text{Logo, } \overline{AC} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \overline{AV}.$$

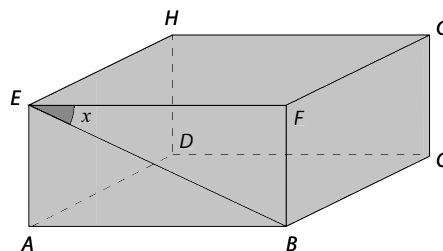
$$\cos (\widehat{AVC}) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \overline{AV}}{\overline{AV}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Logo, } \widehat{AVC} = \cos^{-1} \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \approx 54,7^\circ.$$

$$6.4. \widehat{ACV} = \frac{180^\circ - \cos^{-1} \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)}{2} \approx 62,6^\circ$$

7.

7.1.



$$a) \operatorname{tg} x = \frac{1}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\overline{AB} = \frac{3}{4} \overline{AD} \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{3}{4} \overline{AD}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{4}{3 \operatorname{tg} x}$$

Logo, o volume do paralelepípedo é dado por:

$$V = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \times \frac{4}{3 \operatorname{tg} x} \times 1 = \frac{4}{3 \operatorname{tg}^2 x}$$

b) A área total do paralelepípedo é dada por:

$$A = 2 \times \frac{1}{\operatorname{tg} x} \times \frac{4}{3 \operatorname{tg} x} + 2 \times \frac{1}{\operatorname{tg} x} \times 1 + 2 \times \frac{4}{3 \operatorname{tg} x} \times 1 =$$

$$= \frac{8}{3 \operatorname{tg}^2 x} + \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{8}{3 \operatorname{tg} x} =$$

$$= \frac{8}{3 \operatorname{tg}^2 x} + \frac{14}{3 \operatorname{tg} x}$$

7.2. Se  $x = 30^\circ$ , então:

$$V = \frac{4}{3 \operatorname{tg}^2 30^\circ} = \frac{4}{3 \times \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{4}{3 \times \frac{1}{3}} = 4$$

$$\text{e } A = \frac{8}{3 \operatorname{tg}^2 30^\circ} + \frac{14}{3 \operatorname{tg} 30^\circ} =$$

$$= \frac{8}{3 \times \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} + \frac{14}{3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{8}{3 \times \frac{1}{3}} + \frac{14}{\sqrt{3}} =$$

$$= 8 + \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

8.

8.1. Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 59^\circ}{5} = \frac{\sin 45^\circ}{x} \Leftrightarrow x = \frac{5 \sin 45^\circ}{\sin 59^\circ}$$

Logo,  $x \approx 4,1$ .

8.2. Pela Lei dos Cossenos:

$$x^2 = 4,2^2 + 5,3^2 - 2 \times 4,2 \times 5,3 \times \cos 56^\circ$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 45,73 - 44,52 \cos 56^\circ$$

$$\text{Logo, } x = \sqrt{45,73 - 44,52 \cos 56^\circ} \approx 4,6.$$

8.3.  $180^\circ - 64^\circ - 55^\circ = 61^\circ$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 61^\circ}{x} = \frac{\sin 55^\circ}{4,5} \Leftrightarrow x = \frac{4,5 \sin 61^\circ}{\sin 55^\circ}$$

Logo,  $x \approx 4,8$ .

8.4. Pela Lei dos Cossenos:

$$x^2 = 4^2 + 7,5^2 - 2 \times 4 \times 7,5 \times \cos 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 75,25 - 60 \cos 30^\circ$$

$$\text{Logo, } x = \sqrt{75,25 - 60 \cos 30^\circ} \approx 4,5.$$

8.5. Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 120^\circ}{x} = \frac{\sin 25^\circ}{4,5} \Leftrightarrow x = \frac{4,5 \sin 120^\circ}{\sin 25^\circ}$$

Logo,  $x \approx 9,2$ .

8.6. Pela Lei dos Cossenos:

$$x^2 = 3,6^2 + 5,8^2 - 2 \times 3,6 \times 5,8 \times \cos 100^\circ$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 46,5 - 41,76 \cos 100^\circ$$

$$\text{Logo, } x = \sqrt{46,5 - 41,76 \cos 100^\circ} \approx 7,3.$$

9.

9.1. Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 124^\circ}{5,8} = \frac{\sin \theta}{3,6} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{3,6 \sin 124^\circ}{5,8}$$

$$\text{Logo, } \theta = \sin^{-1} \left( \frac{3,6 \sin 124^\circ}{5,8} \right) \approx 31^\circ.$$

9.2. Pela Lei dos Cossenos:

$$4^2 = 4,2^2 + 3,2^2 - 2 \times 4,2 \times 3,2 \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow 16 = 27,88 - 29,4 \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{11,88}{29,4}$$

$$\text{Logo, } \theta = \cos^{-1} \left( \frac{11,88}{29,4} \right) \approx 66^\circ.$$

9.3. Pela Lei dos Cossenos:

$$3,6^2 = 7,2^2 + 5,9^2 - 2 \times 7,2 \times 5,9 \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow 12,96 = 86,65 - 84,96 \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{73,69}{84,96}$$

$$\text{Logo, } \theta = \cos^{-1} \left( \frac{73,69}{84,96} \right) \approx 30^\circ.$$

9.4. Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 72^\circ}{5} = \frac{\sin \theta}{3,2} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{3,2 \sin 72^\circ}{5}$$

$$\text{Logo, } \theta = \sin^{-1} \left( \frac{3,2 \sin 72^\circ}{5} \right) \approx 37^\circ.$$

9.5. Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 37^\circ}{3,1} = \frac{\sin \theta}{5} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{5 \sin 37^\circ}{3,1}$$

$$\text{Logo, } \theta = \sin^{-1} \left( \frac{5 \sin 37^\circ}{3,1} \right) \approx 76^\circ.$$

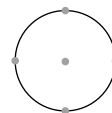
9.6. Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 56^\circ}{4,2} = \frac{\sin \theta}{5} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{5 \sin 56^\circ}{4,2}$$

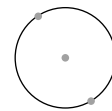
$$\text{Logo, } \theta = \sin^{-1} \left( \frac{5 \sin 56^\circ}{4,2} \right) \approx 81^\circ.$$

10.

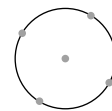
10.1.  $x = 180^\circ + 90^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



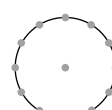
10.2.  $x = -60^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



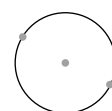
10.3.  $x = -30^\circ + 90^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



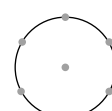
10.4.  $x = 270^\circ + 30^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



10.5.  $x = 330^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



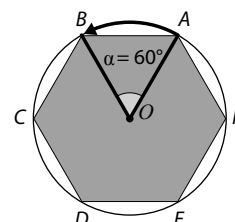
10.6.  $x = -210^\circ + 60^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



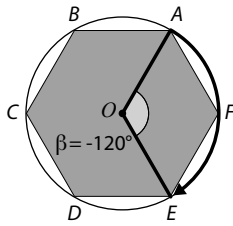
11.

11.1.

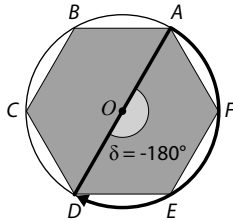
a) Ponto B.



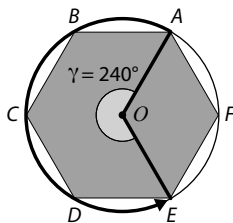
b) Ponto E.



c) Ponto D.



d) Ponto E.



11.2. Por exemplo,  $180^\circ$ ,  $-180^\circ$  e  $540^\circ$ .

11.3.

a)  $480^\circ - 360^\circ = 120^\circ$ ; ponto C.

b)  $-420^\circ + 360^\circ = -60^\circ$ ; ponto F.

c) Ponto B.

d) Ponto C.

11.4.

a) Ponto B.

b) Ponto C.

c) Ponto E.

d) Ponto D.

12.

$$\begin{aligned}
 12.1. \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} &= \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \operatorname{sen} \alpha}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \\
 &= \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha} = \\
 &= 1 + \cos \alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.2. \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\operatorname{sen}^2 \alpha - 1} &= \frac{-(1 - \cos^2 \alpha)}{-(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha)} = \\
 &= \frac{-\operatorname{sen}^2 \alpha}{-\cos^2 \alpha} = \\
 &= \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 = \\
 &= \operatorname{tg}^2 \alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.3. \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \\
 &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \\
 &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \\
 &= \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.4. \frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha} = \\
 &= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \operatorname{sen} \alpha)} = \\
 &= \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \operatorname{sen} \alpha)} = \\
 &= \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.5. \frac{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} &= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1} = \\
 &= \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)} = \\
 &= \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.6. \operatorname{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha &= \\
 &= (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \times (\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \\
 &= 1 \times (\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \\
 &= \operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.7. \operatorname{sen}^4 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= \\
 &= \operatorname{sen}^2 \alpha (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha = \\
 &= \operatorname{sen}^2 \alpha \times 1 + \cos^2 \alpha = \\
 &= \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.8. \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - \operatorname{sen} \alpha \right) \left( \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right) &= \\
 &= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \times \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \\
 &= \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \times \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} = \\
 &= \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \\
 &= \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha
 \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} 13.1. \quad & \sin(450^\circ + x) - \operatorname{tg}(900^\circ + x) + \sin(-90^\circ - x) = \\ & = \sin(360^\circ + 90^\circ + x) - \operatorname{tg}(2 \times 360^\circ + 180^\circ + x) - \\ & - \sin(90^\circ + x) = \\ & = \sin(90^\circ + x) - \operatorname{tg} x - \sin(90^\circ + x) = \\ & = -\operatorname{tg} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13.2. \quad & \cos(x - 90^\circ) + \sin(180^\circ + x) + \cos(180^\circ - x) = \\ & = \cos(90^\circ - x) - \sin x - \cos x = \\ & = \sin x - \sin x - \cos x = \\ & = -\cos x \end{aligned}$$

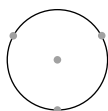
$$\begin{aligned} 13.3. \quad & \operatorname{tg}(450^\circ - x) - \operatorname{tg}(180^\circ - x) - \sin(270^\circ - x) - \\ & - \operatorname{tg}(-270^\circ - x) = \\ & = \operatorname{tg}(360^\circ + 90^\circ - x) + \operatorname{tg} x - \sin(180^\circ + 90^\circ - x) - \\ & - \operatorname{tg}(90^\circ - x) = \\ & = \operatorname{tg}(90^\circ - x) + \operatorname{tg} x + \sin(90^\circ - x) - \operatorname{tg}(90^\circ - x) = \\ & = \operatorname{tg} x + \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13.4. \quad & \operatorname{tg}(-x - 90^\circ) + \operatorname{tg}(450^\circ + x) + \operatorname{tg}(x - 180^\circ) = \\ & = -\operatorname{tg}(90^\circ + x) + \operatorname{tg}(360^\circ + 90^\circ + x) - \operatorname{tg}(180^\circ - x) = \\ & = -\operatorname{tg}(90^\circ + x) + \operatorname{tg}(90^\circ + x) + \operatorname{tg} x = \\ & = \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

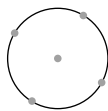
$$\begin{aligned} 13.5. \quad & -\cos(270^\circ + x) - \sin(x - 180^\circ) - \cos(-x - 180^\circ) = \\ & = -\cos(180^\circ + 90^\circ + x) + \sin(180^\circ - x) - \\ & - \cos(180^\circ + x) = \\ & = \cos(90^\circ + x) + \sin x + \cos x = \\ & = -\sin x + \sin x + \cos x = \\ & = \cos x \end{aligned}$$

14.

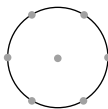
$$14.1. \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$



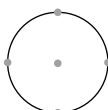
$$14.2. \quad x = \frac{5\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



$$14.3. \quad x = -\frac{2\pi}{3} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$



$$14.4. \quad x = -\pi + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



15.

$$\begin{aligned} 15.1. \quad & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin(\pi + x) = \\ & = \sin x - \sin x + \sin x = \\ & = \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15.2. \quad & \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + x\right) + \operatorname{tg}(5\pi + x) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \\ & = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{tg} x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \\ & = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{tg} x + \cos x = \\ & = \cos x + \operatorname{tg} x + \cos x = \\ & = 2 \cos x + \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15.3. \quad & \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}(3\pi - x) + \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = \\ & = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{tg}(\pi - x) + \operatorname{tg}\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \\ & = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \\ & = -\operatorname{tg} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15.4. \quad & \sin\left(\frac{11\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{23\pi}{2} - x\right) - \sin(29\pi - x) = \\ & = \sin\left(5\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(11\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(\pi - x) = \\ & = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x = \\ & = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x = \\ & = -\cos x + \sin x - \sin x = \\ & = -\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15.5. \quad & \operatorname{tg}(x - \pi) + \cos\left(-\frac{17\pi}{2} + x\right) + \operatorname{tg}(x - 12\pi) = \\ & = -\operatorname{tg}(\pi - x) + \cos\left(8\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \operatorname{tg}(12\pi - x) = \\ & = \operatorname{tg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \operatorname{tg}(-x) = \\ & = \operatorname{tg} x + \sin x + \operatorname{tg} x = \\ & = \sin x + 2 \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15.6. \quad & \sin\left(\frac{32\pi}{2} + x\right) - \sin\left(x - \frac{51\pi}{2}\right) - \cos(-x - 125\pi) = \\ & = \sin(16\pi + x) + \sin\left(\frac{51\pi}{2} - x\right) - \cos(125\pi + x) = \\ & = \sin x + \sin\left(25\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi + x) = \\ & = \sin x + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x = \\ & = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x = \\ & = \sin x - \cos x + \cos x = \\ & = \sin x \end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned}
 16.1. \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(10\pi + \alpha) &= \\
 &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin \alpha = \\
 &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin \alpha = \\
 &= -\sin \alpha - \sin \alpha - \sin \alpha = \\
 &= -3 \sin \alpha \\
 \text{Uma vez que } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{5}, \\
 \text{então } -3 \sin \alpha &= -3 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16.2. \operatorname{tg}(\alpha - \pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \\
 &= -\operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha \\
 \text{Ora, } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{5}. \\
 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{24}{25} \\
 \text{Como } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \text{ e } \sin \alpha < 0, \text{ então } \alpha \text{ pertence} &\text{ ao 3.º quadrante, pelo que } \cos \alpha = -\sqrt{\frac{24}{25}} = \\
 &= -\frac{2\sqrt{6}}{5}.
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha &= \frac{\sqrt{6}}{12} - \frac{2\sqrt{6}}{5} = \\
 &= \frac{5\sqrt{6} - 24\sqrt{6}}{60} = \\
 &= -\frac{19\sqrt{6}}{60}
 \end{aligned}$$

17.

$$17.1. A(\cos \alpha, \sin \alpha); B(-\cos \alpha, -\sin \alpha); C(1, \operatorname{tg} \alpha); D(\sin \alpha + \cos \alpha, 0)$$

$$17.2. A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); C(1, \sqrt{3}); D\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$$17.3. A\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \text{ ou seja, } \cos \alpha = \frac{3}{5} \text{ e } \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Logo, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Então, } B\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right); C\left(1, \frac{4}{3}\right); D\left(\frac{7}{5}, 0\right).$$

$$17.4. C\left(1, \frac{\sqrt{7}}{7}\right), \text{ ou seja, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{7} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{7} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{7}{8}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Como } \alpha \text{ é um ângulo agudo, } \cos \alpha &= \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \\
 &= \frac{\sqrt{14}}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \frac{7}{8} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Como } \alpha \text{ é um ângulo agudo, } \sin \alpha &= \frac{1}{2\sqrt{2}} = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4}. \text{ Então:}
 \end{aligned}$$

$$A\left(\frac{\sqrt{14}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right); B\left(-\frac{\sqrt{14}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right);$$

$$C\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{14}}{4}, 0\right)$$

18.

18.1.

$$\bullet D_f = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 -1 \leq \sin x \leq 1 &\Leftrightarrow -3 \leq 3 \sin x \leq 3 \\
 &\Leftrightarrow 2 \leq 5 + 3 \sin x \leq 8
 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } D'_f = [2, 8].$$

$$\bullet D_g = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 -1 \leq \sin(2x) \leq 1 &\Leftrightarrow 1 \geq -\sin(2x) \geq -1 \\
 &\Leftrightarrow 2 \geq 1 - \sin(2x) \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } D'_g = [0, 2].$$

$$\bullet D_h = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \leq 1 \Leftrightarrow -6 \leq 6 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \leq 6$$

$$\Leftrightarrow 6 \geq -6 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \geq -6$$

$$\Leftrightarrow 9 \geq 3 - 6 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \geq -3$$

$$\text{Logo, } D'_h = [-3, 9].$$

$$\bullet 3 + \cos x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ logo } D_i = \mathbb{R}.$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 3 + \cos x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3 + \cos x} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{2}{3 + \cos x} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } D'_i = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\bullet x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Logo, } D_j = \mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$D'_j = \mathbb{R}$$

$$\bullet 5x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Logo, } D_k = \mathbb{R} \setminus \left\{ x: x = \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$D'_k = \mathbb{R}$$

$$\bullet D_l = \mathbb{R}$$

$$0 \leq \cos^2 \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 4 \cos^2 \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq -4 \cos^2 \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) \geq -4$$

$$\Leftrightarrow 3 \geq 3 - 4 \cos^2 \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) \geq -1$$

$$\text{Logo, } D'_l = [-1, 3].$$

### 18.2.

• Uma vez que  $D'_f = [2, 8]$ , conclui-se que a função  $f$  não tem zeros.

$$\bullet g(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet h(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 6 \cos \left( \frac{1}{2}x \right) = 0 \Leftrightarrow \cos \left( \frac{1}{2}x \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{1}{2}x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

• Uma vez que  $D'_i = \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$ , conclui-se que a função  $i$  não tem zeros.

$$\bullet j(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \operatorname{tg} \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet k(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg} \left( 5x + \frac{\pi}{6} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \left( 5x + \frac{\pi}{6} \right) = -1 \Leftrightarrow 5x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{60} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet l(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 4 \cos^2 \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee$$

$$\vee \cos \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

### 18.3.

$$\bullet D_f = \mathbb{R}$$

$$f(-x) = 5 + 3 \sin(-x) = 5 - 3 \sin x$$

Assim, existem valores reais para os quais

$f(-x) \neq f(x)$  e  $f(-x) \neq -f(x)$ , logo a função  $f$  não é par nem ímpar.

$$\bullet D_g = \mathbb{R}$$

$$g(-x) = 1 - \sin(-2x) = 1 + \sin(2x)$$

Assim, existem valores reais para os quais

$g(-x) \neq g(x)$  e  $g(-x) \neq -g(x)$ , logo a função  $g$  não é par nem ímpar.

$$\bullet D_h = \mathbb{R}$$

$$h(-x) = 3 - 6 \cos \left( -\frac{1}{2}x \right) = 3 - 6 \cos \left( \frac{1}{2}x \right) =$$

$$= h(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, a função  $h$  é uma função par.

$$\bullet D_i = \mathbb{R}$$

$$i(-x) = \frac{2}{3 + \cos(-x)} = \frac{2}{3 + \cos x} = i(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, a função  $i$  é uma função par.

### 18.4.

$$\bullet D'_g = [0, 2]$$

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow 1 - \sin(2x) = 2 \Leftrightarrow \sin(2x) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet D'_i = \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$$

$$i(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3 + \cos x} = 1 \Leftrightarrow 3 + \cos x = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet D'_l = [-1, 3]$$

$$l(x) = 3 \Leftrightarrow 3 - 4 \cos^2 \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = 3$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

### 18.5.

$$\bullet D'_f = [2, 8]$$

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow 5 + 3 \sin x = 2 \Leftrightarrow \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet D'_h = [-3, 9]$$

$$h(x) = -3 \Leftrightarrow 3 - 6 \cos \left( \frac{1}{2}x \right) = -3 \Leftrightarrow \cos \left( \frac{1}{2}x \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet D'_l = [-1, 3]$$

$$\begin{aligned} l(x) = -1 &\Leftrightarrow 3 - 4 \cos^2 \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \vee \cos \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \\ &\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

**18.6.**

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad g(x + \pi) &= 1 - \sin(2(x + \pi)) = 1 - \sin(2x + 2\pi) = \\ &= 1 - \sin(2x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Logo, a função  $g$  é periódica de período  $\pi$ .

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad h(x + 4\pi) &= 3 - 6 \cos \left( \frac{1}{2}(x + 4\pi) \right) = \\ &= 3 - 6 \cos \left( \frac{1}{2}x + 2\pi \right) = \\ &= 3 - 6 \cos \left( \frac{1}{2}x \right) = \\ &= h(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Logo, a função  $h$  é periódica de período  $4\pi$ .

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad k \left( x + \frac{\pi}{5} \right) &= 1 + \operatorname{tg} \left( 5 \left( x + \frac{\pi}{5} \right) + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 1 + \operatorname{tg} \left( 5x + \pi + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 1 + \operatorname{tg} \left( 5x + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= k(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Logo, a função  $k$  é periódica de período  $\frac{\pi}{5}$ .

**19.**

$$\text{19.1.} \quad \arcsen \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{19.2.} \quad \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{19.3.} \quad \arcsen \left( \sin \frac{\pi}{5} \right) = \frac{\pi}{5}$$

$$\text{19.4.} \quad \cos \left( \arcsen \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{19.5.} \quad \arccos \left( \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \arccos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{19.6.} \quad \operatorname{tg} \left( \arcsen \left( -\frac{1}{2} \right) \right) = \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

**20.**

$$\begin{aligned} \text{20.1.} \quad \cos^2 x = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \\ &\vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como  $x \in [-\pi, \pi]$ , tem-se que

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} \right\}.$$

$$\text{20.2.} \quad 2 \sin(2x) = -1 \Leftrightarrow \sin(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ vem que } x = -\frac{\pi}{12} (\in [-\pi, \pi])$$

$$\text{ou } x = \frac{7\pi}{12} (\in [-\pi, \pi]).$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ vem que } x = \frac{11\pi}{12} (\in [-\pi, \pi])$$

$$\text{ou } x = \frac{19\pi}{12} (\notin [-\pi, \pi]).$$

$$\text{Se } k = -1, \text{ vem que } x = -\frac{13\pi}{12} (\notin [-\pi, \pi])$$

$$\text{ou } x = -\frac{5\pi}{12} (\in [-\pi, \pi]).$$

$$\text{Assim, C.S.} = \left\{ -\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12} \right\}.$$

$$\text{20.3.} \quad 3 \operatorname{tg} \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = 3$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0, \text{ vem que } x = -\frac{\pi}{12} (\in [-\pi, \pi]).$$

$$\text{Se } k = 1, \text{ vem que } x = \frac{11\pi}{12} (\in [-\pi, \pi]).$$

$$\text{Assim, C.S.} = \left\{ -\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right\}.$$

$$\text{20.4.} \quad \sin x (1 - 2 \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee 1 - 2 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se  $k = 0$ , vem que  $x = 0 \in [-\pi, \pi]$

ou  $x = \frac{\pi}{3} \in [-\pi, \pi]$  ou  $x = -\frac{\pi}{3} \in [-\pi, \pi]$ .

Se  $k = -1$ , vem que  $x = -\pi \in [-\pi, \pi]$

ou  $x = -\frac{5\pi}{3} \notin [-\pi, \pi]$  ou  $x = -\frac{7\pi}{3} \notin [-\pi, \pi]$ .

Assim, C.S. =  $\left\{-\pi, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}\right\}$ .

## 20.5. $2 \sin x \cos x + \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee 2 \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se  $k = 0$ , vem que  $x = 0 \in [-\pi, \pi]$

ou  $x = \frac{2\pi}{3} \in [-\pi, \pi]$  ou  $x = -\frac{2\pi}{3} \in [-\pi, \pi]$ .

Se  $k = -1$ , vem que  $x = -\pi \in [-\pi, \pi]$

ou  $x = -\frac{4\pi}{3} \notin [-\pi, \pi]$  ou  $x = -\frac{8\pi}{3} \notin [-\pi, \pi]$ .

Assim, C.S. =  $\left\{-\pi, -\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}\right\}$ .

## 20.6. $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee$$

$$\vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se  $k = 0$ , vem que  $x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$

ou  $x = -\frac{\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$  ou  $x = \frac{7\pi}{6} \notin [-\pi, \pi]$ .

Se  $k = -1$ , vem que  $x = -\frac{5\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$

ou  $x = \frac{11\pi}{6} \notin [-\pi, \pi]$  ou  $x = -\frac{5\pi}{6} \notin [-\pi, \pi]$ .

Assim, C.S. =  $\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, 0\right\}$ .

## 21.

### 21.1. $4 \sin^2 x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee$$

$$\vee x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$21.2. 1 - \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$21.3. (1 + \cos x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos x = 1 \vee 1 + \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \underbrace{\cos x = -2}_{\text{Eq. impossível}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$21.4. \sin x \cos x = \sin(\pi - x) \cos(\pi - x)$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos x = \sin x (-\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos x = -\sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$21.5. \sin^2 x + 2 \cos^2 x = 2 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \vee \cos x = -1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$21.6. \sin(2x) - \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \vee 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

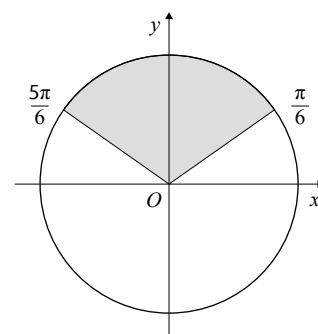
$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \underbrace{2x = \frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi}_{\text{Eq. impossível}}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

## 22.

$$22.1. \sin x > \frac{1}{2}$$

$$\text{Se } x \in [0, 2\pi], \text{ então } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}.$$



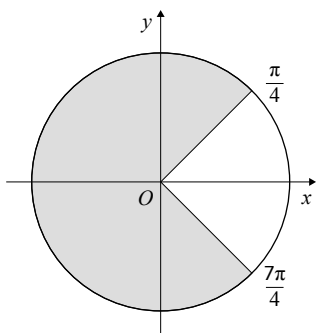
$$\text{Logo, C.S.} = \left] \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right[.$$



$$22.2. 2 \cos x < \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Se } x \in [0, 2\pi[, \text{então } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{7\pi}{4}.$$

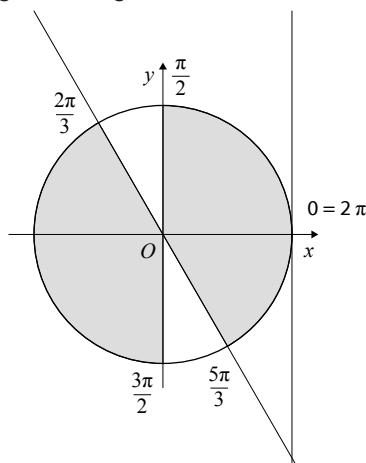


$$\text{Logo, C.S.} = \left] \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right[.$$

$$22.3. -\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3}$$

$$\text{Se } x \in [0, 2\pi[, \text{então } \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}.$$

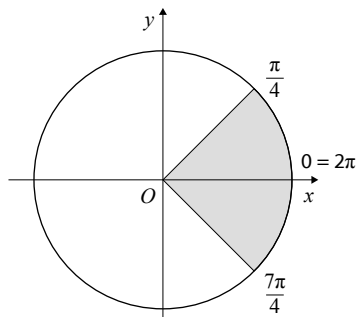


$$\text{Logo, C.S.} = \left[ \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right].$$

$$22.4. \sqrt{2} \cos x \geq 1 \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Se } x \in [0, 2\pi[, \text{então } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{7\pi}{4}.$$

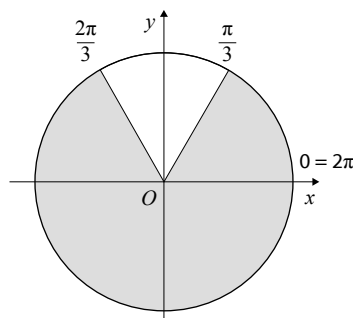


$$\text{Logo, C.S.} = \left[ 0, \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right].$$

$$22.5. -2 \operatorname{sen} x \geq -\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Se } x \in [0, 2\pi[, \text{então } \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}.$$

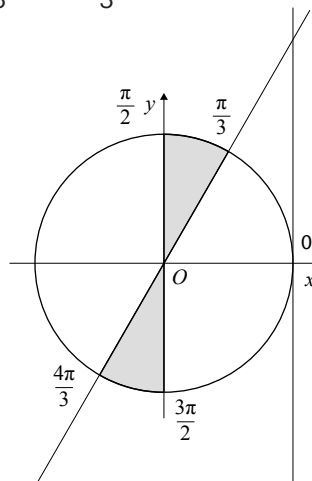


$$\text{Logo, C.S.} = \left[ 0, \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{2\pi}{3}, 2\pi \right].$$

$$22.6. 2 \operatorname{tg} x > 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x > \sqrt{3}$$

$$\text{Se } x \in [0, 2\pi[, \text{então } \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3}.$$



$$\text{Logo, C.S.} = \left] \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right[.$$

23.

$$23.1. f(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{1 + \operatorname{sen}(\pi + x)} + \frac{\cos(\pi - x)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} =$$

$$= \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} + \frac{-\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} \times \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} \times \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{\cos x + \operatorname{sen} x \cos x - \cos x + \operatorname{sen} x \cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= 2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} =$$

$$= 2 \operatorname{tg} x$$

$$23.2. \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{15}{16}$$

$$\text{Como } \theta \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right], \text{ tem-se que } \cos \theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$\text{Logo, } f(\theta) = 2 \operatorname{tg} \theta = \frac{2\sqrt{15}}{15}.$$

$$23.3. f(x) = 2 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow 2 \operatorname{tg} x = 2 \times 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

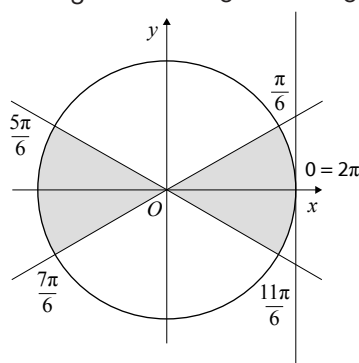
$$23.4. \left| \frac{1}{2} f(x) \right| < \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow |\operatorname{tg} x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \operatorname{tg} x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Se  $x \in [0, 2\pi]$ , então:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{e } \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{11\pi}{6}$$



$$\text{Logo, C.S.} = \left[ 0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{11\pi}{6}, 2\pi \right].$$

24.

$$24.1. N(50+t) = N(t)$$

$$\Leftrightarrow A + B \cos \left( \frac{C(50+t)\pi}{180} \right) =$$

$$= A + B \cos \left( \frac{Ct\pi}{180} \right)$$

$$\Leftrightarrow \cos \left( \frac{50C\pi + Ct\pi}{180} \right) = \cos \left( \frac{Ct\pi}{180} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{50C\pi + Ct\pi}{180} = \frac{Ct\pi}{180} + 2k\pi \vee$$

$$\vee \frac{50C\pi + Ct\pi}{180} = \frac{-Ct\pi}{180} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 50C + Ct = Ct + 360k \vee$$

$$\vee 50C + Ct = -Ct + 360k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 50C = 360k \vee \underbrace{50C + 2Ct = 360k}_{\text{Não permite determinar o valor de C}}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Logo, } C = \frac{360}{50} = 7,2.$$

$$24.2. N(t) = A + B \cos \left( \frac{7t\pi}{180} \right)$$

$$\text{a) } N(0) = 10 \Leftrightarrow A + B \cos 0 = 10 \Leftrightarrow A = 10$$

$$N(9) = 12,5 \Leftrightarrow 10 + B \cos \left( \frac{63\pi}{180} \right) = 12,5$$

$$\Leftrightarrow B \cos \left( \frac{7\pi}{20} \right) = 2,5 \Leftrightarrow B = \frac{2,5}{\cos \left( \frac{7\pi}{20} \right)}$$

$$\text{Logo, } B \approx 5,5.$$

$$\text{b) } N(t) = 10 + 5 \cos \left( \frac{7t\pi}{180} \right)$$

$$-1 \leq \cos \left( \frac{7t\pi}{180} \right) \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq 5 \cos \left( \frac{7t\pi}{180} \right) \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq 10 + 5 \cos \left( \frac{7t\pi}{180} \right) \leq 15$$

O número mínimo de aves foi 5000 e o número máximo foi 15 000.

25.

$$25.1. \overline{AB} = 7$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 7 \operatorname{tg} x$$

$$\cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{7}{\cos x}$$

Logo, o perímetro do triângulo  $[ABC]$  é dado, em função de  $x$ , por:

$$7 + 7 \operatorname{tg} x + \frac{7}{\cos x} = 7 \left( 1 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} \right) = P(x)$$

$$25.2. P\left(\frac{\pi}{3}\right) = 7 \left( 1 + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{\cos \left( \frac{\pi}{3} \right)} \right) =$$

$$= 7 \left( 1 + \sqrt{3} + \frac{1}{\frac{1}{2}} \right) = 7(1 + \sqrt{3} + 2) = 7(3 + \sqrt{3})$$

$$25.3. \overline{AB} = 7$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 7 \operatorname{tg} x$$

$$\overline{AD} = 3$$

$$\overline{DB} = 7 - 3 = 4$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{DE} = 3 \operatorname{tg} x$$

Logo, a área do polígono  $[BCED]$  é dada, em função de  $x$ , por:

$$\frac{7 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{tg} x}{2} \times 4 = 5 \operatorname{tg} x \times 4 = 20 \operatorname{tg} x = A(x)$$

**25.4.**  $A(x) = 20\sqrt{3} \Leftrightarrow 20 \operatorname{tg} x = 20\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

Um vez que  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , então  $x = \frac{\pi}{3}$ .

**25.5.**  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{3}$   
 $\Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

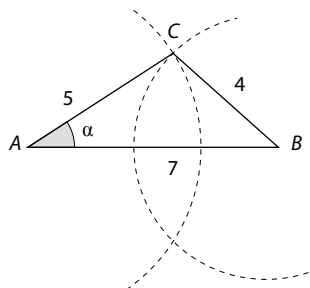
$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

Uma vez que  $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Logo,  $A(\alpha) = 20 \operatorname{tg} \alpha = 20 \times \frac{\sqrt{2}}{4} = 5\sqrt{2}$ .

**26.**  
**26.1.**



Pela Lei dos Cossenos:

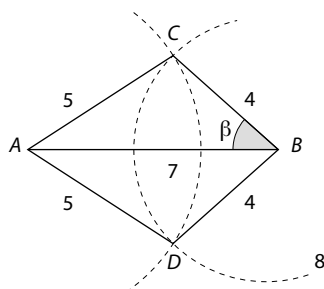
$$4^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow 16 = 74 - 70 \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{58}{70}$$

Assim,  $\widehat{BAC} = \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{58}{70}\right) \approx 0,59 \text{ rad.}$

**26.2.**



Pela Lei dos Cossenos:

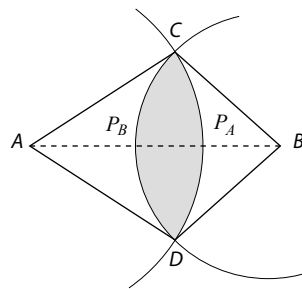
$$5^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \times 4 \times 7 \times \cos \beta$$

$$\Leftrightarrow 25 = 65 - 56 \cos \beta$$

$$\Leftrightarrow \cos \beta = \frac{40}{56}$$

Assim,  $\widehat{CBD} = 2\beta = 2 \cos^{-1}\left(\frac{40}{56}\right) \approx 1,55 \text{ rad.}$

**26.3.**



$$\frac{2\pi \times 5}{P_A} = \frac{2\pi}{2\widehat{BAC}} \Leftrightarrow P_A = 10 \widehat{BAC}$$

$$\Leftrightarrow P_A = 10 \cos^{-1}\left(\frac{58}{70}\right)$$

Logo,  $P_A \approx 5,9425$ .

$$\frac{2\pi \times 4}{P_B} = \frac{2\pi}{\widehat{CBD}} \Leftrightarrow P_B = 4 \widehat{CBD}$$

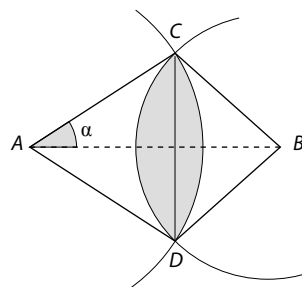
$$\Leftrightarrow P_B = 8 \cos^{-1}\left(\frac{40}{56}\right)$$

Logo,  $P_B \approx 6,2015$ .

Assim, o perímetro da região sombreada é dado por:

$$P_A + P_B \approx 5,9425 + 6,2015 \approx 12,14 \text{ cm}$$

**26.4.**



$$\frac{\pi \times 5^2}{A_A} = \frac{2\pi}{2\widehat{BAC}} \Leftrightarrow A_A = 25 \widehat{BAC}$$

$$\Leftrightarrow A_A = 25 \cos^{-1}\left(\frac{58}{70}\right)$$

Logo,  $A_A \approx 14,8561$ .

$$\frac{\pi \times 4^2}{A_B} = \frac{2\pi}{\widehat{CBD}}$$

$$\Leftrightarrow A_B = 8 \widehat{CBD}$$

$$\Leftrightarrow A_B = 8 \times 2 \cos^{-1}\left(\frac{40}{56}\right)$$

Logo,  $A_B \approx 12,4031$ .

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\frac{1}{2} \overline{CD}}{5} \Leftrightarrow \overline{CD} = 10 \operatorname{sen} \alpha$$

Assim,  $\overline{CD} = 10 \operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{58}{70}\right)\right) \approx 5,5988$ .

Assim, a área da região sombreada é dada por:

$$A_A + A_B - A_{[ADBC]} \approx$$

$$\approx 14,8561 + 12,4031 - \frac{7 \times 5,5988}{2} \approx 7,66 \text{ cm}^2$$

27.

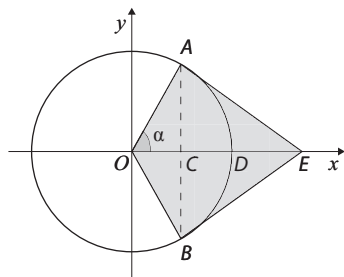
27.1.  $\overline{AC} = \text{sen } \alpha$ , logo  $\overline{AB} = 2 \text{ sen } \alpha$ . $\overline{OC} = \cos \alpha$ , logo  $\overline{CD} = 1 - \cos \alpha$  e, portanto, $\overline{OE} = \cos \alpha + 1 - \cos \alpha + 1 - \cos \alpha = 2 - \cos \alpha$ .Assim, uma expressão, em função de  $\alpha$ , para a área do quadrilátero  $[AOBE]$  é:

$$A(\alpha) = \frac{(2 - \cos \alpha) \times 2 \text{ sen } \alpha}{2} =$$

$$= \frac{4 \text{ sen } \alpha - 2 \cos \alpha \text{ sen } \alpha}{2} =$$

$$= 2 \text{ sen } \alpha - \text{sen } \alpha \cos \alpha$$

27.2.

 $\overline{AB} = 2 \text{ sen } \alpha$  e  $\overline{CE} = 2 - 2 \cos \alpha$ , pela alínea anterior.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (2 \text{ sen } \alpha)^2 + (2 - 2 \cos \alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow d^2 = 4 \text{ sen}^2 \alpha + 4 - 8 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow d^2 = 4(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 4 - 8 \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow d^2 = 8 - 8 \cos \alpha$$

Logo,  $d(\alpha) = \sqrt{8 - 8 \cos \alpha}$ .

$$27.3. \overline{OC} = \overline{CE} \Leftrightarrow \cos \alpha = 2 - 2 \cos \alpha \Leftrightarrow 3 \cos \alpha = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\text{Logo, } \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0,84 \text{ rad.}$$

$$27.4. d = 2 \Leftrightarrow \sqrt{8 - 8 \cos \alpha} = 2 \Leftrightarrow 8 - 8 \cos \alpha = 4$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

Uma vez que  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , tem-se que  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

## Tema II - Geometria Analítica

Páginas 22 a 29

1.

$$1.1. 3y = \sqrt{3}x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{3}$$

O declive da reta é  $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .A inclinação é a amplitude  $\alpha$  tal que

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ ou seja, } \alpha = 30^\circ.$$

$$1.2. x + y = 1 \Leftrightarrow y = -x + 1$$

O declive da reta é  $m = -1$ .A inclinação é a amplitude  $\alpha$  tal que

$$\text{tg } \alpha = -1 \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ ou seja, } \alpha = 135^\circ.$$

$$1.3. (x, y) = (1, 2) + k(1, -\sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$$

O declive da reta é  $m = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$ .A inclinação é a amplitude  $\alpha$  tal que

$$\text{tg } \alpha = -\sqrt{3} \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ ou seja, } \alpha = 120^\circ.$$

$$1.4. (x, y) = (0 - 2) + k(\sqrt{3}, -1), k \in \mathbb{R}$$

O declive da reta é  $m = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ .A inclinação é a amplitude  $\alpha$  tal que

$$\text{tg } \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ ou seja, } \alpha = 150^\circ.$$

2.

$$2.1. m = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Assim, uma equação reduzida da reta é da forma

 $y = \sqrt{3}x + b$ . Como A pertence à reta, tem-se:

$$\sqrt{3} = \sqrt{3} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 3\sqrt{3}$$

Logo, a equação reduzida da reta é  $y = \sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$ .Se o declive da reta é  $\sqrt{3}$ , então um vetor diretor da reta pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas  $(1, \sqrt{3})$ .

Assim, uma equação vetorial da reta pode ser:

$$(x, y) = (-2, \sqrt{3}) + k(1, \sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$$

$$2.2. m = \text{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Assim, uma equação reduzida da reta é da forma

 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ . Como B pertence à reta, tem-se:

$$-1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = 0$$

Logo, a equação reduzida da reta é  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ .Se o declive da reta é  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ , então um vetor diretorda reta pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas  $(-3, \sqrt{3})$ .

Então, uma equação vetorial da reta pode ser:

$$(x, y) = (\sqrt{3}, -1) + k(-3, \sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$$

$$2.3. m = \text{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$$

Assim, uma equação reduzida da reta é da forma

 $y = -x + b$ .Como a reta interseca o eixo  $Oy$  em  $y = 5$ , tem-se que a equação reduzida da reta é  $y = -x + 5$ .

Se o declive da reta é  $-1$ , então um vetor diretor da reta pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas  $(-1, 1)$ .

Então, uma equação vetorial da reta pode ser:

$$(x, y) = (0, 5) + k(-1, 1), k \in \mathbb{R}$$

**2.4.**  $m = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Assim, uma equação reduzida da reta é da forma

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b.$$

Como a reta interseca o eixo  $Ox$  em  $x = -1$ , tem-se:

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-1) + b \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo, a equação reduzida da reta é  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Se o declive da reta é  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , então um vetor diretor

da reta pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas  $(3, \sqrt{3})$ .

Então, uma equação vetorial da reta pode ser:

$$(x, y) = (-1, 0) + k(3, \sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$$

**3.** A reta  $a$  passa nos pontos de coordenadas  $(-3, 0)$  e  $(0, 1)$ , logo o seu declive é dado por  $\frac{1-0}{0-(-3)} = \frac{1}{3}$ .

A inclinação de  $a$  é a amplitude  $\alpha$  tal que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ ou seja, } \alpha \approx 18,4^\circ.$$

A reta  $b$  passa nos pontos de coordenadas  $(0, 3)$  e

$$(4, 0), \text{ logo o seu declive é dado por } \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4}.$$

A inclinação de  $b$  é a amplitude  $\alpha$  tal que

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4} \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ ou seja, } \alpha \approx 143,1^\circ.$$

A reta  $c$  passa nos pontos de coordenadas  $(3, 3)$  e

$$(0, 0), \text{ logo o seu declive é dado por } \frac{3-0}{3-0} = 1. \text{ A in-}$$

clinação de  $c$  é a amplitude  $\alpha$  tal que  $\operatorname{tg} \alpha = 1 \wedge$

$$0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ ou seja, } \alpha = 45^\circ.$$

A reta  $d$  passa nos pontos de coordenadas  $(-1, 3)$  e

$$(0, 1), \text{ logo o seu declive é dado por } \frac{3-1}{-1-0} = -2.$$

A inclinação de  $d$  é a amplitude  $\alpha$  tal que

$$\operatorname{tg} \alpha = -2 \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ ou seja, } \alpha \approx 116,6^\circ.$$

**4.**

**4.1.**  $\vec{AB} \cdot \vec{FE} = 2 \times 2 \times \cos 0^\circ = 4$

**4.2.**  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 2 \times 2 \times \cos 90^\circ = 0$

**4.3.**  $\vec{AH} \cdot \vec{ED} = 2 \times 2 \times \cos 180^\circ = -4$

**4.4.**  $\vec{GH} \cdot \vec{BC} = 2 \times 2 \times \cos 135^\circ = -2\sqrt{2}$

#### Cálculo auxiliar

$$\alpha = \frac{180^\circ \times (8-2)}{8} = 135^\circ, \text{ sendo } \alpha \text{ a amplitude de um ângulo interno do octógono.}$$

**5.**

**5.1.**  $\vec{AB} \cdot \vec{LI} = 2 \times 4 \times \cos 0^\circ = 8$

**5.2.**  $\vec{AF} \cdot \vec{EK} = 2 \times 5 \times \cos 90^\circ = 0$

**5.3.**  $\vec{BE} \cdot \vec{JG} = 4 \times 4 \times \cos 120^\circ = -8$

**5.4.**  $\vec{HI} \cdot \vec{CF} = 2 \times 4 \times \cos 120^\circ = -4$

**5.5.**  $\vec{GJ} \cdot \vec{LE} = 4 \times \sqrt{29} \times \cos (\widehat{KLE}) =$   
 $= 4 \times \sqrt{29} \times \frac{2\sqrt{29}}{29} = 8$

#### Cálculos auxiliares

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{LE}^2 = 2^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{LE}^2 = 29$$

Ou seja,  $\overline{LE} = \sqrt{29}$ .

$$\text{Assim, } \cos (\widehat{KLE}) = \frac{\overline{LK}}{\overline{LE}} = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}.$$

**5.6.**  $\vec{BC} \cdot \vec{EL} = 2 \times \sqrt{29} \times \cos (180^\circ - \widehat{KLE}) =$   
 $= 2 \times \sqrt{29} \times \left(-\frac{2\sqrt{29}}{29}\right) = -4$

**6.**

**6.1.**  $r: y = \frac{1}{2}x + 2$

Um vetor diretor de  $r$  é, por exemplo,  $\vec{r}(2, 1)$ .

$$s: 2y - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 2$$

Um vetor diretor de  $s$  é, por exemplo,  $\vec{s}(2, 3)$ .

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = 2 \times 2 + 1 \times 3 = 7$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|} = \frac{7}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}}$$

Logo, a amplitude do ângulo entre as retas  $r$  e  $s$  é, aproximadamente,  $29,7^\circ$ .

**6.2.**  $r: (x, y) = (1, 2) + k(2, -1), k \in \mathbb{R}$

Um vetor diretor de  $r$  é, por exemplo,  $\vec{r}(2, -1)$ .

$$s: (x, y) = (1, 2) + k(-3, 1), k \in \mathbb{R}$$

Um vetor diretor de  $s$  é, por exemplo,  $\vec{s}(-3, 1)$ .

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = 2 \times (-3) + (-1) \times 1 = -7$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|} = \frac{7}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}}$$

Logo, a amplitude do ângulo entre as retas  $r$  e  $s$  é, aproximadamente,  $8,1^\circ$ .

**6.3.**  $r: (x, y, z) = (1, 2, 0) + k(-1, 2, -1), k \in \mathbb{R}$   
 Um vetor diretor de  $r$  é, por exemplo,  $\vec{r}(-1, 2, 1)$ .  
 $s: (x, y, z) = (1, 0, 0) + k(0, 1, 2), k \in \mathbb{R}$   
 Um vetor diretor de  $s$  é, por exemplo,  $\vec{s}(0, 1, 2)$ .  
 $\vec{r} \cdot \vec{s} = (-1) \times 0 + 2 \times 1 + 1 \times 2 = 4$   
 $\|\vec{r}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$   
 $\|\vec{s}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$   
 $\cos \alpha = \frac{|4|}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}}$   
 Logo, a amplitude do ângulo entre as retas  $r$  e  $s$  é, aproximadamente,  $43,1^\circ$ .

**6.4.**  $r: (x, y, z) = (1, -2, 1) + k(-2, 3, 1), k \in \mathbb{R}$   
 Um vetor diretor de  $r$  é, por exemplo,  $\vec{r}(-2, 3, 1)$ .  
 $s: y = 1 \wedge x = z$   
 Um vetor diretor de  $s$  é, por exemplo,  $\vec{s}(1, 0, 1)$ .  
 $\vec{r} \cdot \vec{s} = (-2) \times 1 + 3 \times 0 + 1 \times 1 = -1$   
 $\|\vec{r}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$   
 $\|\vec{s}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$   
 $\cos \alpha = \frac{|-1|}{\sqrt{14} \times \sqrt{2}}$   
 Logo, a amplitude do ângulo entre as retas  $r$  e  $s$  é, aproximadamente,  $79,1^\circ$ .

**7.**

$$\begin{aligned} 7.1. \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \\ &= -2 + 0 = \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7.2. (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = \\ &= 5^2 - 2^2 = \\ &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7.3. (-\vec{v}) \cdot (2\vec{v} - \vec{u}) &= -2\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} = \\ &= -2\|\vec{v}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = \\ &= -2 \times 2^2 - 2 = \\ &= -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7.4. (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) + \vec{v} \cdot \vec{w} &= \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} + \|\vec{v}\|^2 = \\ &= -2 - 0 + 2^2 = \\ &= 2 \end{aligned}$$

**8.**

$$\begin{aligned} 8.1. \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \\ &= \sqrt{3} \times 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\ &= \sqrt{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9 \end{aligned}$$

**Cálculo auxiliar**

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

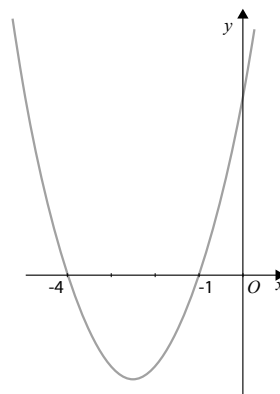
$$\begin{aligned} 8.2. (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \\ &= (\sqrt{3})^2 - 18 + 36 = \\ &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.3. \vec{u} \cdot \vec{w} &= 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}, -1) \cdot (m, m+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}m - m - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow m(\sqrt{2} - 1) = 2 \\ &\Leftrightarrow m = \frac{2}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \\ &\Leftrightarrow m = \frac{2\sqrt{2}+2}{2-1} \\ &\Leftrightarrow m = 2 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.4. \vec{u} \cdot \vec{a} > 0 &\Leftrightarrow (\sqrt{2}, -1) \cdot (-\sqrt{8}, 5k + k^2) > 0 \\ &\Leftrightarrow -4 - 5k - k^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow k^2 + 5k + 4 < 0 \\ &\Leftrightarrow k \in ]-4, -1[ \end{aligned}$$

**Cálculo auxiliar**

$$\begin{aligned} k^2 + 5k + 4 &= 0 \Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm 3}{2} \\ &\Leftrightarrow k = -4 \vee k = -1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 9. \vec{AB} \cdot \vec{AM} &= \vec{AB} \cdot (\vec{AB} + \vec{BM}) = \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{BM} = \\ &= \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AB}\| \times \|\vec{BM}\| \cos 120^\circ = \\ &= a^2 + a \times \frac{a}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \\ &= a^2 - \frac{1}{4} a^2 = \\ &= \frac{3a^2}{4} \end{aligned}$$

$$10. A_{[ADE]} = 6 \Leftrightarrow \frac{\overline{AE} \times \overline{AD}}{2} = 6$$

$$\Leftrightarrow \overline{AE} \times 4 = 12$$

$$\Leftrightarrow \overline{AE} = 3$$

$$\begin{aligned} \vec{ED} \cdot \vec{DC} &= (\vec{EA} + \vec{AD}) \cdot \vec{DC} = \\ &= \vec{EA} \cdot \vec{DC} + \vec{AD} \cdot \vec{DC} = \\ &= 3 \times 4 \times \cos 180^\circ + 4 \times 4 \times \cos 90^\circ = \\ &= -12 \end{aligned}$$

11.

$$11.1. 2y - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 2$$

O declive desta reta é  $\frac{3}{2}$ , logo o declive de qualquer reta que lhe seja perpendicular é  $-\frac{2}{3}$ . Assim, a equação reduzida de uma reta perpendicular à reta dada é da forma  $y = -\frac{2}{3}x + b$ . Como a reta contém o ponto A:

$$1 = -\frac{2}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{3}$$

Logo, a equação pedida é  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ .

$$11.2. (x, y) = (1, 2) + k(2, -1), k \in \mathbb{R}$$

O declive desta reta é  $-\frac{1}{2}$ , logo o declive de qualquer reta que lhe seja perpendicular é 2. Assim, a equação reduzida de uma reta perpendicular à reta dada é da forma  $y = 2x + b$ . Como a reta contém o ponto A:

$$1 = 2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -3$$

Logo, a equação pedida é  $y = 2x - 3$ .

$$11.3. \text{Um vetor diretor da reta definida por } \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3}$$

é, por exemplo,  $\vec{r}(2, 3)$ , pelo que o declive desta reta é  $\frac{3}{2}$ . Logo, o declive de qualquer reta que lhe seja perpendicular é  $-\frac{2}{3}$ . Assim, a equação redu-

zida de uma reta perpendicular à reta dada é da forma  $y = -\frac{2}{3}x + b$ . Como a reta contém o ponto A:

$$1 = -\frac{2}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{3}$$

Logo, a equação pedida é  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ .

$$11.4. \text{Um vetor diretor da reta definida por}$$

$$\begin{cases} x = k \\ y = 1 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

é, por exemplo,  $\vec{r}(1, -2)$ , pelo que o declive desta reta é  $-2$ . Logo, o declive de qualquer reta que lhe seja perpendicular é  $\frac{1}{2}$ . Assim, a equação reduzida de uma reta perpendicular à reta dada é da forma  $y = \frac{1}{2}x + b$ . Como a reta contém o ponto A:

$$1 = \frac{1}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 0$$

Logo, a equação pedida é  $y = \frac{1}{2}x$ .

12.

$$12.1. \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 0 + 0 \times 3 + 4 \times (-2) = 0 + 0 - 8 = -8$$

Como  $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ , o ângulo formado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é obtuso.

$$12.2. \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 5 + 2 \times 0 + \sqrt{5} \times (-\sqrt{5}) = 5 + 0 - 5 = 0$$

Como  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , o ângulo formado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é reto.

$$12.3. \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 + (-3) \times (-1) + 1 \times (-2) = 6 + 3 - 2 = 7$$

Como  $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ , o ângulo formado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é agudo.

13.

$$13.1. \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2a + 2 + 2a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a = -4$$

$$\Leftrightarrow a = -1$$

$$13.2. \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 3 + a^2 - 2a - a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \vee a = 2$$

$$14. \vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

$$\Leftrightarrow (m, 1, 1) \cdot (2, m-1, -3) = ((m, 1, 1) + (2, m-1, -3)) \cdot (2-m, m, m)$$

$$\Leftrightarrow 2m + m - 1 - 3 = (2+m, m, -2) \cdot (2-m, m, m)$$

$$\Leftrightarrow 3m - 4 = 4 - m^2 + m^2 - 2m$$

$$\Leftrightarrow 5m = 8$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{8}{5}$$

$$15. \vec{AB} = (1, 2, 1) - (1, 1, m) = (0, 1, 1-m)$$

$$\vec{AC} = (2, 1, 1) - (1, 1, m) = (1, 0, 1-m)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (0, 1, 1-m) \cdot (1, 0, 1-m) = (1-m) \times (1-m) = m^2 - 2m + 1$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (1-m)^2} = \sqrt{1 + (1-m)^2}$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (1-m)^2} = \sqrt{1 + (1-m)^2}$$

$$\cos(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 - 2m + 1}{\sqrt{1 + (1-m)^2} \times \sqrt{1 + (1-m)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 - 2m + 1}{1 + (1-m)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 2 = 1 + 1 - 2m + m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \vee m = 2$$

16. Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor nas condições do enunciado.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \\ \|\vec{u}\| = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 1, 0) = 1 \\ (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 1 \\ a + a + 1 + c = 0 \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ c = -2a - 1 \\ a^2 + (a + 1)^2 + (-2a - 1)^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ a^2 + a^2 + 2a + 1 + 4a^2 + 4a + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ 6a^2 + 6a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -1 \\ a = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 0 \\ c = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}(0, 1, -1)$  ou  $\vec{u}(-1, 0, 1)$ .

17.

17.1.  $\vec{AB} = (-3, 3, 6) - (3, 5, 3) = (-6, -2, 3)$   
 $\vec{BC} = (-5, 0, 0) - (-3, 3, 6) = (-2, -3, -6)$   
 $\vec{CD} = (1, 2, -3) - (-5, 0, 0) = (6, 2, -3) = -\vec{AB}$   
 $\vec{DA} = (3, 5, 3) - (1, 2, -3) = (2, 3, 6) = -\vec{BC}$   
Então,  $[AB]$  é paralelo a  $[CD]$  e  $[BC]$  é paralelo a  $[DA]$ .

$$\|\vec{AB}\| = \|\vec{CD}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

$$\|\vec{BC}\| = \|\vec{DA}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

Logo,  $\vec{AB} = \vec{BC} = \vec{CD} = \vec{DA}$ .

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = (-6, -2, 3) \cdot (-2, -3, -6) = 12 + 6 - 18 = 0$$

Logo,  $[AB]$  é perpendicular a  $[BC]$  e, como  $[AB]$  é paralelo a  $[CD]$  e  $[BC]$  é paralelo a  $[DA]$ , então os restantes lados também são perpendiculares dois a dois. Logo,  $[ABCD]$  é um quadrado.

17.2. Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{BC}$ , tal que  $\|\vec{u}\| = 7$ .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \|\vec{u}\| = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-6, -2, 3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, -3, -6) = 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6a - 2b + 3c = 0 \\ -2a - 3b - 6c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3c = 6a + 2b \\ -2a - 3b - 2(6a + 2b) = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{6a + 2b}{3} \\ -2a - 3b - 12a - 4b = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{6a - 4a}{3} \\ b = -2a \\ a^2 + b^2 + c^2 = 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2a}{3} \\ b = -2a \\ a^2 + (-2a)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 = 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ a^2 + 4a^2 + \frac{4a^2}{9} = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ \frac{49a^2}{9} = 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ a^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = -6 \\ a = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} c = -2 \\ b = 6 \\ a = -3 \end{cases}$$

Então,  $\vec{u}(3, -6, 2)$  ou  $\vec{u}(-3, 6, -2)$ .

• Se  $\vec{u}(3, -6, 2)$ , obtêm-se os pontos:

$$E = (3, 5, 3) + (3, -6, 2) = (6, -1, 5)$$

$$F = (-3, 3, 6) + (3, -6, 2) = (0, -3, 8)$$

$$G = (-5, 0, 0) + (3, -6, 2) = (-2, -6, 2)$$

$$H = (1, 2, -3) + (3, -6, 2) = (4, -4, -1)$$

• Se  $\vec{u}(-3, 6, -2)$ , obtêm-se os pontos:

$$E = (3, 5, 3) + (-3, 6, -2) = (0, 11, 1)$$

$$F = (-3, 3, 6) + (-3, 6, -2) = (-6, 9, 4)$$

$$G = (-5, 0, 0) + (-3, 6, -2) = (-8, 6, -2)$$

$$H = (1, 2, -3) + (-3, 6, -2) = (-2, 8, -5)$$

$$\begin{aligned} 18. \|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \\ &\quad + \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w} = \\ &= 2^2 + 0 + 2 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 0 + 2^2 + 2 \times 1 \times \\ &\quad \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1 \times 2 \times \\ &\quad \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1^2 = \\ &= 4 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 + 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + \\ &\quad + 1 = \\ &= 4 + 1 + 4 + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 1 = \\ &= 11 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$19. (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = 3^2 - 1^2 = 8$$

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\| &= \sqrt{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})} = \\ &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}} = \\ &= \sqrt{3^2 + 3 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1^2} = \\ &= \sqrt{9 + \frac{3}{2} + 1} = \sqrt{\frac{23}{2}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\|(\vec{u} - \vec{v})\| &= \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})} = \\ &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}} = \\ &= \sqrt{3^2 - 3 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1^2} = \\ &= \sqrt{9 - \frac{3}{2} + 1} = \sqrt{\frac{17}{2}}\end{aligned}$$

Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo formado pelos vetores  $\vec{u} + \vec{v}$  e  $\vec{u} - \vec{v}$ . Então:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{8}{\sqrt{\frac{23}{2}} \times \sqrt{\frac{17}{2}}} = \\ &= \frac{16}{\sqrt{23} \times \sqrt{17}}\end{aligned}$$

Logo,  $\alpha \approx 36^\circ$ .

**20.**

**20.1.** O lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  do plano tais que  $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$  é a circunferência de diâmetro  $[AB]$ :

$$\begin{aligned}(x-2, y-1) \cdot (x-1, y-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2x + 2 + y^2 - 3y - y + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x + y^2 - 4y &= -5 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 - 4y + 4 &= -5 + \frac{9}{4} + 4 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Ou seja, a circunferência de centro  $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$  e raio igual a  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**20.2.** O lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  do plano tais que  $\vec{AC} \cdot \vec{CP} = 0$  é a reta tangente à circunferência de centro  $A$  no ponto  $C$  ou é a reta perpendicular à reta  $AC$  que passa no ponto  $C$ :

$$\begin{aligned}(-3, -2) \cdot (x+1, y+1) &= 0 \Leftrightarrow -3x - 3 - 2y - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow 2y &= -3x - 5 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\end{aligned}$$

#### Cálculo auxiliar

$$\vec{AC} = (-1, -1) - (2, 1) = (-3, -2)$$

**20.3.** O lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  do plano tais que  $\vec{BC} \cdot \vec{MP} = 0$ , onde  $M$  é o ponto médio de  $[BC]$ , é a mediatriz do segmento de reta  $[BC]$ :

$$\begin{aligned}(-2, -4) \cdot (x, y-1) &= 0 \Leftrightarrow -2x - 4y + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow 4y &= -2x + 4 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{2}x + 1\end{aligned}$$

#### Cálculos auxiliares

$$\vec{BC} = (-1, -1) - (1, 3) = (-2, -4)$$

$$M = \left(\frac{1-1}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (0, 1)$$

**21.**

$$\mathbf{21.1.} \quad 2(x-1) + 1(y-1) + 3(z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 + y - 1 + 3z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y + 3z - 9 = 0$$

$$\mathbf{21.2.} \quad -3(x-1) + 1(y+1) + 0(z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 3 + y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + y + 4 = 0$$

$$\mathbf{21.3.} \quad 1(x-0) - 2(y+1) + 1(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y - 2 + z - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y + z - 3 = 0$$

**22.**

$$\mathbf{22.1.} \quad \vec{AB} = (2, 1, 3) - (1, 2, 3) = (1, -1, 0)$$

$$\vec{AC} = (3, 1, 2) - (1, 2, 3) = (2, -1, -1)$$

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{AC}$ .

$$\begin{aligned}\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, -1, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, -1, -1) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ 2a - b - c = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2b - b - c = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = b \end{cases} &\end{aligned}$$

Assim,  $\vec{u}(b, b, b)$ ,  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Por exemplo, se  $b = 1$ , obtém-se  $\vec{u}(1, 1, 1)$ .

Então,  $\vec{u}(1, 1, 1)$  é um vetor normal ao plano e  $A(1, 2, 3)$  é um ponto do plano:

$$1(x-1) + 1(y-2) + 1(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + y - 2 + z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + z - 6 = 0$$

$$\mathbf{22.2.} \quad \vec{AB} = (2, 1, -1) - (1, 1, 1) = (1, 0, -2)$$

$$\vec{AC} = (5, -1, 0) - (1, 1, 1) = (4, -2, -1)$$

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{AC}$ .

$$\begin{aligned}\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 0, -2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (4, -2, -1) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2c = 0 \\ 4a - 2b - c = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ 8c - 2b - c = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = \frac{7}{2}c \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}\left(2c, \frac{7}{2}c, c\right)$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Por exemplo, se  $c = 2$ , obtém-se  $\vec{u}(4, 7, 2)$ .

Então,  $\vec{u}(4, 7, 2)$  é um vetor normal ao plano e

$A(1, 1, 1)$  é um ponto do plano:

$$4(x-1) + 7(y-1) + 2(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 4 + 7y - 7 + 2z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 7y + 2z - 13 = 0$$

$$\mathbf{22.3.} \quad \vec{AB} = (2, -3, 0) - (-2, 2, 1) = (4, -5, -1)$$

$$\vec{AC} = (1, 3, -2) - (-2, 2, 1) = (3, 1, -3)$$

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{AC}$ .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (4, -5, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (3, 1, -3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 5b - c = 0 \\ 3a + b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4a - 5b \\ 3a + b - 12a + 15b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9a + 16b = 0 \\ c = 4a - \frac{45}{16}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{9}{16}a \\ c = \frac{19}{16}a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{19}{16}a \\ b = \frac{9}{16}a \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}\left(a, \frac{9}{16}a, \frac{19}{16}a\right)$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Por exemplo, se  $a = 16$ , obtém-se  $\vec{u}(16, 9, 19)$ .

Então,  $\vec{u}(16, 9, 19)$  é um vetor normal ao plano e

$A(-2, 2, 1)$  é um ponto do plano:

$$16(x+2) + 9(y-2) + 19(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 16x + 32 + 9y - 18 + 19z - 19 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16x + 9y + 19z - 5 = 0$$

## 23.

**23.1.** Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(0, 1, 0)$  e um vetor diretor da reta  $s$  é  $\vec{s}(0, 1, 0)$ .

Logo, as retas  $r$  e  $s$  ou são paralelas ou são coincidentes.

Um ponto da reta  $s$  é o ponto de coordenadas  $(1, 0, 2)$ .

Substituindo na equação da reta  $r$ :

$$(1, 0, 2) = (1, 1, 3) + k(0, 1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = 1 + k, \\ 2 = 3 \end{cases}$$

que é uma condição impossível.

Então, o ponto de coordenadas  $(1, 0, 2)$  não pertence à reta  $r$ . Logo, as retas  $r$  e  $s$  são paralelas. Sabe-se que  $A(1, 1, 3)$  é um ponto da reta  $r$  e que  $B(1, 0, 2)$  é um ponto da reta  $s$ .

$$\vec{AB} = (1, 0, 2) - (1, 1, 3) = (0, -1, -1)$$

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{r}$ .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, -1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 1, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b - c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}(a, 0, 0)$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Por exemplo, se  $a = 1$ , obtém-se  $\vec{u}(1, 0, 0)$ .

Então,  $\vec{u}(1, 0, 0)$  é um vetor normal ao plano e  $A(1, 1, 3)$  é um ponto do plano:

$$1(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0$$

**23.2.** Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(1, -1, -1)$ .

Um vetor diretor da reta  $s$  é  $\vec{s}(2, 3, -1)$ .

Logo, as retas  $r$  e  $s$  não são paralelas porque estes vetores não são colineares  $\left(\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{3} \neq \frac{-1}{-1}\right)$ .

O ponto de coordenadas  $(1, 0, 2)$  pertence às duas retas. Logo, as retas  $r$  e  $s$  são concorrentes.

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$ .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, -1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 3, -1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b - c = 0 \\ 2a + 3b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a - b \\ 2a + 3b - a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = a - b \\ a + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -5b \\ a = -4b \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}(-4b, b, -5b)$ ,  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Por exemplo, se  $b = 1$ , obtém-se  $\vec{u}(-4, 1, -5)$ .

Então,  $\vec{u}(-4, 1, -5)$  é um vetor normal ao plano e  $A(1, 0, 2)$  é um ponto do plano:

$$-4(x-1) + 1(y-0) - 5(z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 4 + y - 5z + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + y - 5z + 14 = 0$$

**23.3.** Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(3, 2, -1)$  e um vetor diretor da reta  $s$  é  $\vec{s}(0, 1, 2)$ .

Logo, as retas  $r$  e  $s$  não são paralelas porque estes vetores não são colineares  $\left(\frac{0}{3} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{2}{-1}\right)$ .

O ponto de coordenadas (1, 0, 1) pertence às duas retas. Logo, as retas  $r$  e  $s$  são concorrentes. Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (3, 2, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 1, 2) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b - c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 4c - c = 0 \\ b = -2c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{3}c \\ b = -2c \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,  $\vec{u}\left(\frac{5}{3}c, -2c, c\right)$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Por exemplo, se  $c = 3$ , obtém-se  $\vec{u}(5, -6, 3)$ .

Então,  $\vec{u}(5, -6, 3)$  é um vetor normal ao plano e  $A(1, 0, 1)$  é um ponto do plano:

$$\begin{aligned} 5(x-1) - 6(y-0) + 3(z-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5x - 5 - 6y + 3z - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 5x - 6y + 3z - 8 &= 0 \end{aligned}$$

**23.4.** Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(-2, 4, 6)$  e um vetor diretor da reta  $s$  é  $\vec{s}(1, -2, -3)$ .

Então,  $\vec{r} = -2\vec{s}$ , pelo que os vetores são colineares e as retas  $r$  e  $s$  ou são paralelas ou são coincidentes.

Um ponto da reta  $r$  é o ponto de coordenadas (2, -1, 2).

Substituindo nas equações da reta  $s$ :

$$\begin{cases} 2 = 2 + k \\ -1 = 1 - 2k \\ 2 = -2 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ -1 = 1 \\ 2 = -2 \end{cases}, \text{ que é um sistema}$$

impossível.

Então, o ponto de coordenadas (2, -1, 2) não pertence à reta  $s$ . Logo, as retas  $r$  e  $s$  são paralelas.

Sabe-se que  $A(2, -1, 2)$  é um ponto da reta  $r$  e que  $B(2, 1, -2)$  é um ponto da reta  $s$ .

$$\vec{AB} = (2, 1, -2) - (2, -1, 2) = (0, 2, -4)$$

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{r}$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 2, -4) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 4, 6) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2b - 4c = 0 \\ -2a + 4b + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c \\ -2a + 8c + 6c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c \\ a = 7c \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}(7c, 2c, c)$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Por exemplo, se  $c = 1$ , obtém-se  $\vec{u}(7, 2, 1)$ .

Então,  $\vec{u}(7, 2, 1)$  é um vetor normal ao plano e  $A(2, -1, 2)$  é um ponto do plano:

$$\begin{aligned} 7(x-2) + 2(y+1) + 1(z-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 7x - 14 + 2y + 2 + z - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 7x + 2y + z - 14 &= 0 \end{aligned}$$

## 24.

**24.1.**  $A(1, 2, 3)$  é um ponto exterior à reta  $r$  e  $B(2, 1, 2)$  é um ponto da reta  $r$ .

$$\vec{AB} = (2, 1, 2) - (1, 2, 3) = (1, -1, -1)$$

Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(0, 1, 0)$ .

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{r}$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, -1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 1, 0) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - b - c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,  $\vec{u}(c, 0, c)$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Por exemplo, se  $c = 1$ , obtém-se  $\vec{u}(1, 0, 1)$ .

Então,  $\vec{u}(1, 0, 1)$  é um vetor normal ao plano e  $A(1, 2, 3)$  é um ponto do plano:

$$\begin{aligned} 1(x-1) + 0(y-2) + 1(z-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 1 + z - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x + z - 4 &= 0 \end{aligned}$$

**24.2.**  $A(-1, 2, 1)$  é um ponto exterior à reta  $r$  e  $B(2, 1, -2)$  é um ponto da reta  $r$ .

$$\vec{AB} = (2, 1, -2) - (-1, 2, 1) = (3, -1, -3)$$

Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(2, 3, -1)$ .

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{r}$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (3, -1, -3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 3, -1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b - 3c = 0 \\ 2a + 3b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a - 3c \\ 2a + 9a - 9c - c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a - 3c \\ 11a = 10c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \times \frac{10}{11}c - 3c \\ a = \frac{10}{11}c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{11}c \\ a = \frac{10}{11}c \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,  $\vec{u}\left(\frac{10}{11}c, -\frac{3}{11}c, c\right)$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Por exemplo, se  $c = 11$ , obtém-se  $\vec{u}(10, -3, 11)$ .

Então,  $\vec{u}(10, -3, 11)$  é um vetor normal ao plano e  $A(-1, 2, 1)$  é um ponto do plano:

$$\begin{aligned} 10(x+1) - 3(y-2) + 11(z-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 10x + 10 - 3y + 6 + 11z - 11 &= 0 \\ \Leftrightarrow 10x - 3y + 11z + 5 &= 0 \end{aligned}$$

- 24.3.**  $A(1, 1, -2)$  é um ponto exterior à reta  $r$  e  $B(1, 0, 1)$  é um ponto da reta  $r$ .

$$\vec{AB} = (1, 0, 1) - (1, 1, -2) = (0, -1, 3)$$

Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(2, 2, -1)$ .

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{r}$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, -1, 3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 2, -1) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -b + 3c = 0 \\ 2a + 2b - c = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3c \\ 2a + 6c - c = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3c \\ 2a = -5c \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3c \\ a = -\frac{5}{2}c \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,  $\vec{u}\left(-\frac{5}{2}c, 3c, c\right)$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Por exemplo, se  $c = 2$ , obtém-se  $\vec{u}(-5, 6, 2)$ .

Então,  $\vec{u}(-5, 6, 2)$  é um vetor normal ao plano e  $A(1, 1, -2)$  é um ponto do plano:

$$\begin{aligned} -5(x-1) + 6(y-1) + 2(z+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -5x + 5 + 6y - 6 + 2z + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow -5x + 6y + 2z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

- 24.4.**  $A(-2, -1, 2)$  é um ponto exterior à reta  $r$  e  $B(2, 1, 1)$  é um ponto da reta  $r$ .

$$\vec{AB} = (2, 1, 1) - (-2, -1, 2) = (4, 2, -1)$$

Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(2, 3, 0)$ .

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{r}$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (4, 2, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 3, 0) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b - c = 0 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -6b + 2b - c = 0 \\ a = -\frac{3}{2}b \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} c = -4b \\ a = -\frac{3}{2}b \end{cases} & \end{aligned}$$

Assim,  $\vec{u}\left(-\frac{3}{2}b, b, -4b\right)$ ,  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Por exemplo, se  $b = 2$ , obtém-se  $\vec{u}(-3, 2, -8)$ .

Então,  $\vec{u}(-3, 2, -8)$  é um vetor normal ao plano e  $A(-2, -1, 2)$  é um ponto do plano:

$$\begin{aligned} -3(x+2) + 2(y+1) - 8(z-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x - 6 + 2y + 2 - 8z + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x + 2y - 8z + 12 &= 0 \end{aligned}$$

**25.**

- 25.1.**  $(2, 1, 5)$  e  $(1, 2, 3)$  são vetores paralelos ao plano  $\alpha$  e o ponto de coordenadas  $(0, 0, 0)$  é um ponto deste plano.

Assim:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (0, 0, 0) + s(2, 1, 5) + t(1, 2, 3), s, t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow (x, y, z) &= s(2, 1, 5) + t(1, 2, 3), s, t \in \mathbb{R}, \text{ é uma equação vetorial do plano } \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 2s + t \\ y = s + 2t \\ z = 5s + 3t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

é um sistema de equações paramétricas do plano  $\alpha$ .

- 25.2.**  $\vec{AB} = (2, 1, 4) - (1, 2, 3) = (1, -1, 1)$

$$\vec{AC} = (-1, 2, 4) - (1, 2, 3) = (-2, 0, 1)$$

$\vec{AB}$  e  $\vec{AC}$  são vetores paralelos ao plano  $\alpha$  e o ponto  $A$  é um ponto deste plano.

Assim,  $(x, y, z) = (1, 2, 3) + s(1, -1, 1) + t(-2, 0, 1)$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$ , é uma equação vetorial do plano  $\alpha$ .

$$\begin{cases} x = 1 + s - 2t \\ y = 2 - s \\ z = 3 + s + t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

é um sistema de equações paramétricas do plano  $\alpha$ .

- 25.3.** Por exemplo, os vetores  $\vec{u}(0, -1, 2)$  e  $\vec{v}(-2, 1, 0)$  são perpendiculares ao vetor dado e, portanto, são vetores paralelos ao plano  $\alpha$ . O ponto de coordenadas  $(2, 1, 4)$  é um ponto deste plano.

Assim,  $(x, y, z) = (2, 1, 4) + s(0, -1, 2) + t(-2, 1, 0)$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$  é uma equação vetorial do plano  $\alpha$ .

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - s + t \\ z = 4 + 2s \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

é um sistema de equações paramétricas do plano  $\alpha$ .

- 25.4.** Um plano paralelo ao plano de equação  $x + 2y + 3z - 4 = 0$  tem como vetor normal, por exemplo,  $(1, 2, 3)$ . Os vetores  $\vec{u}(0, -3, 2)$  e  $\vec{v}(-3, 0, 1)$ , por exemplo, são perpendiculares ao vetor de coordenadas  $(1, 2, 3)$  e são vetores paralelos ao plano  $\alpha$ . O ponto de coordenadas  $(2, 1, 1)$  é um ponto deste plano.

Assim,  $(x, y, z) = (2, 1, 1) + s(0, -3, 2) + t(-3, 0, 1)$ ,  
 $s, t \in \mathbb{R}$  é uma equação vetorial do plano  $\alpha$ .

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 3s \\ z = 1 + 2s + t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

é um sistema de equações paramétricas do plano  $\alpha$ .

### 25.5. Um vetor normal ao plano de equação

$2x + y + z + 1 = 0$  é, por exemplo,  $(2, 1, 1)$  e é um vetor paralelo ao plano  $\alpha$ .

$\vec{AB} = (2, 1, 3) - (1, 2, 3) = (1, -1, 0)$  também é um vetor paralelo ao plano  $\alpha$ .

O ponto de coordenadas  $(1, 2, 3)$  é um ponto deste plano.

Assim,  $(x, y, z) = (1, 2, 3) + s(2, 1, 1) + t(1, -1, 0)$ ,  
 $s, t \in \mathbb{R}$  é uma equação vetorial do plano  $\alpha$ .

$$\begin{cases} x = 1 + 2s + t \\ y = 2 + s - t \\ z = 3 + s \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

é um sistema de equações paramétricas do plano  $\alpha$ .

### 25.6. O vetor $(1, 0, 0)$ é paralelo ao plano $\alpha$ , visto que o plano $\alpha$ é paralelo ao eixo $Ox$ .

$\vec{AB} = (-2, 1, 1) - (1, -2, 3) = (-3, 3, -2)$  também é um vetor paralelo ao plano  $\alpha$ . O ponto de coordenadas  $(1, -2, 3)$  é um ponto deste plano.

Assim,  $(x, y, z) = (1, -2, 3) + s(1, 0, 0) + t(-3, 3, -2)$ ,  
 $s, t \in \mathbb{R}$  é uma equação vetorial do plano  $\alpha$ .

$$\begin{cases} x = 1 + s - 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

é um sistema de equações paramétricas do plano  $\alpha$ .

## 26.

### 26.1. As coordenadas dos pontos do eixo $Ox$ são da forma $(x, 0, 0)$ , sendo $x$ um número real. Então:

$$2x + 0 - 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Logo, o plano  $\alpha$  intersecta o eixo  $Ox$  no ponto de coordenadas  $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ .

As coordenadas dos pontos do eixo  $Oy$  são da forma  $(0, y, 0)$ , sendo  $y$  um número real.

Então:

$$0 + y - 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$$

Logo, o plano  $\alpha$  intersecta o eixo  $Oy$  no ponto de coordenadas  $(0, -1, 0)$ .

As coordenadas dos pontos do eixo  $Oz$  são da forma  $(0, 0, z)$ , sendo  $z$  um número real.

Então:

$$0 + 0 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$$

Logo, o plano  $\alpha$  intersecta o eixo  $Oz$  no ponto de coordenadas  $(0, 0, 1)$ .

### 26.2. Por exemplo, os vetores $\vec{u}(1, -2, 0)$ e $\vec{v}(0, 1, 1)$ são perpendiculares ao vetor $\vec{n}$ e são vetores paralelos ao plano $\alpha$ . O ponto de coordenadas $(0, 0, 1)$ é um ponto deste plano.

Assim,  $(x, y, z) = (0, 0, 1) + s(1, -2, 0) + t(0, 1, 1)$ ,  
 $s, t \in \mathbb{R}$  é uma equação vetorial do plano  $\alpha$ .

### 26.3.

$$\begin{cases} x = s \\ y = -2s + t \\ z = 1 + t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

é um sistema de equações paramétricas do plano  $\alpha$ .

### 26.4. $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(2, 1, -1)$ , $k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta $r$ .

## 27.

### 27.1. $A(3, 0, 0)$ , $C(0, 3, 0)$ e $F(0, 3, 3)$

$$\vec{AC} = (0, 3, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 3, 0)$$

$$\vec{AF} = (0, 3, 3) - (3, 0, 0) = (-3, 3, 3)$$

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AC}$  e  $\vec{AF}$ .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AF} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-3, 3, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-3, 3, 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 3b = 0 \\ -3a + 3b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 0 \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}(b, b, 0)$ ,  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Por exemplo, se  $b = 1$ , obtém-se  $\vec{u}(1, 1, 0)$ .

Então,  $\vec{u}(1, 1, 0)$  é um vetor normal ao plano e  $A(3, 0, 0)$  é um ponto do plano:

$$1(x - 3) + 1(y - 0) + 0(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3 + y = 0$$

$\Leftrightarrow x + y - 3 = 0$ , que é uma equação cartesiana do plano  $ACF$ .

### 27.2. $\vec{AC} = (-3, 3, 0)$ $\vec{AF} = (-3, 3, 3)$ $E(3, 3, 3)$

Um plano paralelo a  $ACF$  e que contém o ponto  $E$  pode ser definido pela seguinte equação vetorial:

$$(x, y, z) = (3, 3, 3) + s(-3, 3, 0) + t(-3, 3, 3), s, t \in \mathbb{R}$$

### 27.3.

#### a) $C(0, 3, 0)$ , $D(3, 0, 3)$

O plano mediador do segmento de reta  $[CD]$  é o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y, z)$  do espaço tais que  $\vec{CD} \cdot \vec{MP} = 0$ , onde  $M$  é o ponto médio de  $[CD]$ .

$$M = \left( \frac{0+3}{2}, \frac{3+0}{2}, \frac{0+3}{2} \right) = \left( \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$\vec{CD} = (3, 0, 3) - (0, 3, 0) = (3, -3, 3)$$

$$\vec{CD} \cdot \vec{MP} = 0 \Leftrightarrow (3, -3, 3) \cdot \left( x - \frac{3}{2}, y - \frac{3}{2}, z - \frac{3}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{9}{2} - 3y + \frac{9}{2} + 3z - \frac{9}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3y + 3z - \frac{9}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - 6y + 6z - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2y + 2z - 3 = 0$$

**b)**  $A(3, 0, 0), G(0, 0, 3)$

A superfície esférica de diâmetro  $[AG]$  é o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y, z)$  do espaço tais que  $\vec{AP} \cdot \vec{GP} = 0$ .

$$\vec{AP} \cdot \vec{GP} = 0 \Leftrightarrow (x-3, y, z) \cdot (x, y, z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + y^2 + z^2 - 3z = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + z^2 - 3z + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left( x - \frac{3}{2} \right)^2 + y^2 + \left( z - \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{2}$$

**c)**  $B(3, 3, 0), D(3, 0, 3)$

O plano tangente à esfera de centro  $B$  no ponto  $D$  é o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y, z)$  do espaço tais que  $\vec{BD} \cdot \vec{DP} = 0$ .

$$\vec{BD} = (3, 0, 3) - (3, 3, 0) = (0, -3, 3)$$

$$\vec{BD} \cdot \vec{DP} = 0 \Leftrightarrow (0, -3, 3) \cdot (x-3, y, z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3y + 3z - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow -y + z - 3 = 0$$

**28.**

**28.1.** A circunferência de diâmetro  $[AB]$  é o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  do plano tais que  $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$ .

$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0 \Leftrightarrow (x-3, y+1) \cdot (x+1, y-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 3x - 3 + y^2 - 4y + y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 3y = 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} = 7 + 1 + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left( y - \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{41}{4}$$

**28.2.**  $\vec{AB} = (-1, 4) - (3, -1) = (-4, 5)$

$$AB: (x, y) = (3, -1) + k(-4, 5), k \in \mathbb{R}$$

**28.3.** O declive da reta  $AB$  é dado por  $m = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$ .

A inclinação da reta  $AB$  é  $\alpha$  tal que  $\text{tg } \alpha = -\frac{5}{4}$  e  $0 < \alpha < \pi$ , ou seja,  $\alpha \approx 2,25$  radianos.

**28.4.** Uma vez que o declive da reta  $AB$  é  $-\frac{5}{4}$ , o declive de uma reta qualquer perpendicular à reta  $AB$  é  $\frac{4}{5}$ .

Assim, a equação pedida é da forma  $y = \frac{4}{5}x + b$ .

Como  $E(1, 1)$  pertence a esta reta, tem-se:

$$1 = \frac{4}{5} \times 1 + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{5}$$

Logo, a equação pedida é  $y = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}$ .

**28.5.**  $\vec{AF} = (-1, -2) - (3, -1) = (-4, -1)$

$$\vec{BF} = (-1, -2) - (-1, 4) = (0, -6)$$

$$\|\vec{AF}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

$$\|\vec{BF}\| = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6$$

$$\vec{AF} \cdot \vec{BF} = -4 \times 0 + (-1) \times (-6) = 6$$

Assim, sendo  $\alpha$  o ângulo formado pelas retas  $AF$  e  $BF$ , tem-se:

$$\cos \alpha = \frac{|6|}{\sqrt{17} \times 6}$$

Logo,  $\alpha \approx 75,96^\circ$ .

**28.6.** Seja  $\beta = \widehat{(\vec{AC}, \vec{DC})}$ .

$$\frac{\frac{2\pi}{41\pi}}{\frac{4}{24}} = \frac{\beta}{\frac{41\pi}{24}} \Leftrightarrow \frac{8}{41} = \frac{24\beta}{41\pi}$$

$$\Leftrightarrow 24\beta = \frac{8 \times 41\pi}{41} \Leftrightarrow 24\beta = 8\pi$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{8\pi}{24} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{DC} = \|\vec{AC}\| \|\vec{DC}\| \cos \beta =$$

$$= \frac{\sqrt{41}}{2} \times \frac{\sqrt{41}}{2} \times \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) = \frac{41}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{41}{8}$$

**28.7.** A reta  $t$  é tangente à circunferência de centro  $C$  no ponto  $A$ , logo é o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  do plano tais que  $\vec{CA} \cdot \vec{AP} = 0$ .

$$\vec{CA} = (3, -1) - \left( 1, \frac{3}{2} \right) = \left( 2, -\frac{5}{2} \right)$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{AP} = 0 \Leftrightarrow \left( 2, -\frac{5}{2} \right) \cdot (x-3, y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6 - \frac{5}{2}y - \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 12 - 5y - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5y = 4x - 17$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4}{5}x - \frac{17}{5}$$

**28.8.** O lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  do plano tais que  $\vec{AB} \cdot \vec{CP} = 0$  é a mediatriz do segmento de reta  $[AB]$ , pois  $C$  é o ponto médio de  $[AB]$ .

$$\vec{AB} = (-1, 4) - (3, -1) = (-4, 5)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CP} = 0 \Leftrightarrow (-4, 5) \cdot \left( x-1, y-\frac{3}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 4 + 5y - \frac{15}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -8x + 10y + 8 - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow 10y = 8x + 7$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4}{5}x + \frac{7}{10}$$

29.

$$29.1. \vec{AE} = (0, 2, 6) - (3, 0, 0) = (-3, 2, 6)$$

$$\text{Assim, AE: } \frac{x-3}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}.$$

$$29.2. M = \left( \frac{3+0}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{0+6}{2} \right) = \left( \frac{3}{2}, 1, 3 \right)$$

O plano mediador de  $[AE]$  é o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y, z)$  do espaço tais que  $\vec{AE} \cdot \vec{MP} = 0$ , onde  $M$  é o ponto médio de  $[AE]$ .

$$\begin{aligned} \vec{AE} \cdot \vec{MP} = 0 &\Leftrightarrow (-3, 2, 6) \cdot \left( x - \frac{3}{2}, y - 1, z - 3 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x + \frac{9}{2} + 2y - 2 + 6z - 18 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x + 2y + 6z - \frac{31}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow -6x + 4y + 12z - 31 = 0 \end{aligned}$$

$$F(0, -2, 6)$$

$$-6 \times 0 + 4 \times (-2) + 12 \times 6 - 31 = 0 \Leftrightarrow 33 = 0,$$

que é uma proposição falsa.

Logo,  $F$  não pertence ao plano.

$$29.3. B(0, 2, 0), C(0, -2, 0)$$

$$\vec{AB} = (0, 2, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 2, 0)$$

$$\vec{AC} = (0, -2, 0) - (3, 0, 0) = (-3, -2, 0)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-3, 2, 0) \cdot (-3, -2, 0) = 9 - 4 + 0 = 5$$

$$\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{Assim, } \cos(\widehat{AB, AC}) = \frac{5}{\sqrt{13} \times \sqrt{13}}.$$

$$\text{Logo, } (\widehat{AB, AC}) \approx 67,4^\circ.$$

29.4. O lugar geométrico dos pontos  $P(x, y, z)$  tais que  $\vec{EP}$  é perpendicular a  $\vec{CP}$  é a superfície esférica de diâmetro  $[EC]$ .

$$\begin{aligned} \vec{EP} \cdot \vec{CP} = 0 &\Leftrightarrow (x, y - 2, z - 6) \cdot (x, y + 2, z) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4 + z^2 - 6z = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9 = 4 + 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 13 \end{aligned}$$

$$29.5. D(3, 0, 6)$$

$$\vec{AB} = (0, 2, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 2, 0)$$

$$\vec{AD} = (3, 0, 6) - (3, 0, 0) = (0, 0, 6)$$

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{AD}$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AD} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-3, 2, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 0, 6) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 2b = 0 \\ 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}b \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \vec{u} \left( \frac{2}{3}b, b, 0 \right), b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Por exemplo, se  $b = 3$ , obtém-se  $\vec{u}(2, 3, 0)$ .

Então,  $\vec{u}(2, 3, 0)$  é um vetor normal ao plano e  $A(3, 0, 0)$  é um ponto do plano:

$$2(x - 3) + 3(y - 0) + 0(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6 + 3y = 0$$

$\Leftrightarrow 2x + 3y - 6 = 0$ , que é uma equação cartesiana do plano  $ABD$ .

29.6. Para que o plano  $\alpha$  e o plano  $ABD$  sejam paralelos os seus vetores normais têm de ser colineares. Um vetor normal ao plano  $ABD$  é  $(2, 3, 0)$  e um vetor normal ao plano  $\alpha$  é  $(1, a, b)$ .

Para que estes vetores sejam colineares  $b = 0$  e  $\frac{2}{1} = \frac{3}{a} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$ .

$$29.7. \vec{AC} = (0, -2, 0) - (3, 0, 0) = (-3, -2, 0)$$

$$\vec{AD} = (3, 0, 6) - (3, 0, 0) = (0, 0, 6)$$

Assim, uma equação vetorial do plano  $ACD$  é:

$$(x, y, z) = (3, 0, 0) + s(-3, -2, 0) + t(0, 0, 6), s, t \in \mathbb{R}$$

$$29.8. F(0, -2, 6)$$

$$\vec{BF} = (0, -2, 6) - (0, 2, 0) = (0, -4, 6)$$

Um vetor diretor do eixo  $Oy$  é  $(0, 1, 0)$ .

$$(0, -4, 6) \cdot (0, 1, 0) = -4$$

$$\|(0, -4, 6)\| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 6^2} = \sqrt{52}$$

$$\|(0, 1, 0)\| = 1$$

Seja  $\alpha$  o ângulo que a reta  $BF$  faz com o eixo  $Oy$ .

Então:

$$\cos \alpha = \frac{|-4|}{\sqrt{52} \times 1}$$

$$\text{Logo, } \alpha \approx 56,3^\circ.$$

30.

30.1. Seja  $C(a, b, c)$ .

$$\vec{OC} = 2\vec{OA} \Leftrightarrow (a, b, c) - (0, 0, 0) = 2((1, 2, 3) - (0, 0, 0))$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) = 2(1, 2, 3)$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) = (2, 4, 6)$$

Logo,  $C(2, 4, 6)$ .

$$D = \left( \frac{1+3}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = (2, -1, 1)$$

$$30.2. \vec{CD} = (2, -1, 1) - (2, 4, 6) = (0, -5, -5)$$

Logo, uma equação vetorial da reta  $CD$  é:

$$(x, y, z) = (2, 4, 6) + k(0, -5, -5), k \in \mathbb{R}$$

$$30.3. \vec{AB} = (3, -4, -1) - (1, 2, 3) = (2, -6, -4)$$

Assim,  $AB: (x, y, z) = (1, 2, 3) + s(2, -6, -4), s \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} 2 = 1 + 2s \\ 4 - 5k = 2 - 6s \\ 6 - 5k = 3 - 4s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{2} \\ 5k = 2 + 6 \times \frac{1}{2} \\ 5k = 3 + 4 \times \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{2} \\ k = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

Assim, o ponto de interseção das retas  $CD$  e  $AB$  tem coordenadas  $(2, -1, 1)$ , ou seja, trata-se do ponto  $D$ .

$$30.4. \vec{CD} = (0, -5, -5) \quad \vec{AB} = (2, -6, -4)$$

$$\vec{CD} \cdot \vec{AB} = 0 + 30 + 20 = 50$$

$$\|\vec{CD}\| = \sqrt{0^2 + (-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{56}$$



Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo formado pelas retas  $CD$  e  $AB$ .

$$\cos \alpha = \frac{50}{\sqrt{50} \times \sqrt{56}}$$

Logo,  $\alpha \approx 19^\circ$ .

**30.5.**  $\vec{OA} = (1, 2, 3)$   $\vec{OB} = (3, -4, -1)$

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{OA} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{OB} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 2, 3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (3, -4, -1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ 3a - 4b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b - 3c \\ -6b - 9c - 4b - c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c - 3c \\ b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = -c \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,  $\vec{u}(-c, -c, c)$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Por exemplo, se  $c = -1$ , obtém-se  $\vec{u}(1, 1, -1)$ .

Então,  $\vec{u}(1, 1, -1)$  é um vetor normal ao plano e  $O(0, 0, 0)$  é um ponto do plano:

$$1(x - 0) + 1(y - 0) - 1(z - 0) = 0$$

$\Leftrightarrow x + y - z = 0$ , que é uma equação cartesiana do plano  $AOB$ .

**30.6.** Seja  $r$  uma reta perpendicular ao plano  $AOB$  que passa pelo ponto  $E$ .

Um vetor diretor da reta  $r$  é um vetor normal ao plano  $AOB$ , por exemplo,  $(1, 1, -1)$ .

Assim, uma equação vetorial da reta  $r$  é:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(1, 1, -1), k \in \mathbb{R}$$

Os pontos da reta  $r$  são da forma:

$$(1 + k, 1 + k, 1 - k), k \in \mathbb{R}$$

Substituindo na equação do plano  $AOB$ , obtém-se:

$$1 + k + 1 + k - 1 - k = 0 \Leftrightarrow 3k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

Logo, o ponto  $P$  de interseção da reta  $r$  com o plano  $AOB$  tem coordenadas:

$$\left(1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Então:

$$\begin{aligned} \overline{EP} &= \sqrt{\left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

**30.7.**  $\vec{OA} = (1, 2, 3)$

$$\vec{OB} = (3, -4, -1)$$

$\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$  são vetores paralelos a  $AOB$  e, logo, a qualquer plano paralelo a  $AOB$ .

Assim, uma equação vetorial do plano que é paralelo a  $AOB$  e contém o ponto  $E(1, 1, 1)$  é:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, 2, 3) + t(3, -4, -1), s, t \in \mathbb{R}$$

**30.8.** O lugar geométrico dos pontos que satisfazem a condição  $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$  é a superfície esférica de diâmetro  $[AB]$ .

$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1, y - 2, z - 3) \cdot (x - 3, y + 4, z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 + y^2 + 2y - 8 + z^2 - 2z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = 8 + 4 + 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 14$$

**31.**

**31.1.**  $O(0, 0, 0)$

$D(3, 4, 4)$ , por se tratar do centro da superfície esférica referida no enunciado.

$G(0, 0, z)$ , uma vez que a aresta  $[OG]$  está contida no eixo  $Oz$  e  $G$  pertence à superfície esférica, logo:

$$(0 - 3)^2 + (0 - 4)^2 + (z - 4)^2 = 25 \Leftrightarrow (z - 4)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 4$$

Assim,  $G(0, 0, 4)$ .

$$\vec{A} = \vec{O} + \vec{GD} = (0, 0, 0) + (3, 4, 0) = (3, 4, 0)$$

$$\vec{OG} = 4 = \vec{AD}, \text{ logo } \vec{AB} = 8 = \vec{OC}.$$

Assim,  $C(0, 8, 0)$ .

$$\vec{F} = \vec{G} + (0, 8, 0) = (0, 8, 4)$$

De forma análoga se conclui que  $E(3, 12, 4)$  e  $B(3, 12, 0)$ .

$$\overline{GD} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$$

$$\text{Logo, } H\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 8\right) \text{ e } I\left(\frac{3}{2}, \frac{21}{2}, 8\right).$$

**31.2.**  $H\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 8\right)$

$$D(3, 4, 4)$$

$$\vec{HD} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -4\right) \text{ é um vetor diretor da reta } HD \text{ e}$$

é perpendicular a qualquer vetor normal ao plano  $\alpha$ .

Um vetor normal ao plano  $\alpha$  é  $(m, -m, m - 1)$ .

Assim:

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -4\right) \cdot (m, -m, m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}m - \frac{3}{2}m - 4m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 1$$



$$31.3. \vec{FG} = (0, 0, 4) - (0, 8, 4) = (0, -8, 0)$$

$$\vec{GA} = (3, 4, 0) - (0, 0, 4) = (3, 4, -4)$$

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores  $\vec{FG}$  e  $\vec{GA}$ .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{FG} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{GA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, -8, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (3, 4, -4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8b = 0 \\ 3a + 4b - 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 3a - 4c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{4}{3}c \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}\left(\frac{4}{3}c, 0, c\right)$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Por exemplo, se  $c = 3$ , obtém-se  $\vec{u}(4, 0, 3)$ .

Então,  $\vec{u}(4, 0, 3)$  é um vetor normal ao plano  $FGA$  e a qualquer outro plano que seja paralelo a  $FGA$ .

Assim, uma equação cartesiana do plano paralelo a  $FGA$  e que contém o ponto  $C$  é dada por:

$$4(x - 0) + 0(y - 8) + 3(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3z = 0$$

31.4.  $\vec{u}(4, 0, 3)$  é um vetor normal ao plano  $FGA$  (de acordo com a alínea anterior) e o ponto  $G(0, 0, 4)$  pertence ao plano  $FGA$ . Assim, uma equação deste plano é:

$$4(x - 0) + 0(y - 0) + 3(z - 4) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3z - 12 = 0$$

$$\vec{OE} = (3, 12, 4)$$

Logo,  $OE: (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(3, 12, 4)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Os pontos da reta  $OE$  são então da forma

$$(3k, 12k, 4k), k \in \mathbb{R}.$$

Substituindo na equação do plano  $FGA$ :

$$4 \times 3k + 3 \times 4k - 12 = 0 \Leftrightarrow 24k = 12 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

Logo, o ponto de interseção da reta  $OE$  com o plano  $FGA$  tem coordenadas  $\left(\frac{3}{2}, 6, 2\right)$ .

$$31.5. \vec{IE} = (3, 12, 4) - \left(\frac{3}{2}, \frac{21}{2}, 8\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -4\right)$$

$$IE: (x, y, z) = (3, 12, 4) + k\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -4\right), k \in \mathbb{R}$$

Os pontos  $P$  da reta  $IE$  são da forma:

$$\left(3 + \frac{3}{2}k, 12 + \frac{3}{2}k, 4 - 4k\right), k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \vec{BP} &= \left(3 + \frac{3}{2}k, 12 + \frac{3}{2}k, 4 - 4k\right) - (3, 12, 0) = \\ &= \left(\frac{3}{2}k, \frac{3}{2}k, 4 - 4k\right), k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{IE} \cdot \vec{BP} &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -4\right) \cdot \left(\frac{3}{2}k, \frac{3}{2}k, 4 - 4k\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{9}{4}k + \frac{9}{4}k - 16 + 16k = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{41}{2}k = 16 \Leftrightarrow k = \frac{32}{41}$$

$$\text{Logo, } \vec{BP} = \left(\frac{48}{41}, \frac{48}{41}, \frac{36}{41}\right).$$

Assim, uma equação vetorial da reta que passa pelo vértice  $B$  e é concorrente e perpendicular à reta  $IE$  é, por exemplo:

$$(x, y, z) = (3, 12, 0) + k\left(\frac{48}{41}, \frac{48}{41}, \frac{36}{41}\right), k \in \mathbb{R}$$

31.6.

$$a) \vec{OE} = (3, 12, 4)$$

$$\vec{OG} = (0, 0, 4)$$

$$\vec{OE} \cdot \vec{OG} = 0 + 0 + 16 = 16$$

$$\|\vec{OE}\| = \sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2} = 13$$

$$\|\vec{OG}\| = 4$$

Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo formado pelas retas  $OE$  e  $OG$ .

$$\cos \alpha = \frac{16}{13 \times 4}$$

Logo,  $\alpha \approx 72,1^\circ$ .

$$b) \vec{OE} = (3, 12, 4)$$

$$\vec{OA} = (3, 4, 0)$$

$$\vec{OE} \cdot \vec{OA} = 9 + 48 + 0 = 57$$

$$\|\vec{OE}\| = \sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2} = 13$$

$$\|\vec{OA}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$$

Seja  $\beta$  a amplitude do ângulo formado pelas retas  $OE$  e  $OA$ .

$$\cos \beta = \frac{57}{13 \times 5}$$

Logo,  $\beta \approx 28,7^\circ$ .

31.7. Seja  $M$  o ponto médio de  $[CD]$ .

$$C(0, 8, 0)$$

$$D(3, 4, 4)$$

$$M = \left(\frac{0+3}{2}, \frac{8+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 6, 2\right)$$

$$\vec{CD} \cdot \vec{MP} = 0 \Leftrightarrow (3, -4, 4) \cdot \left(x - \frac{3}{2}, y - 6, z - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{9}{2} - 4y + 24 + 4z - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 4y + 4z + \frac{23}{2} = 0, \text{ que é uma}$$

equação cartesiana do plano medidor de  $[CD]$ .

$$31.8. D(3, 4, 4)$$

$$G(0, 0, 4)$$

$$\vec{DG} \cdot \vec{GP} = 0 \Leftrightarrow (-3, -4, 0) \cdot (x, y, z - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x - 4y = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 4y = 0, \text{ que é uma equação}$$

cartesiana do plano tangente no ponto  $G$  à superfície esférica de centro  $D$  e que passa em  $G$ .

## Tema III - Sucessões

Páginas 35 a 43

1.

$$1.1. a_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}; a_3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}; a_4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$b_1 = \frac{-1}{2 \times 1} = -\frac{1}{2}; b_2 = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}; b_3 = \frac{-1}{2 \times 3} = -\frac{1}{6};$$

$$b_4 = \frac{2}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$$

$$c_1 = \frac{1+1}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1; c_2 = \frac{2+1}{2 \times 2} = \frac{3}{4};$$

$$c_3 = \frac{3+1}{2 \times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; c_4 = \frac{4+1}{2 \times 4} = \frac{5}{8}$$

$$d_1 = \frac{2 \times 1}{1+2} = \frac{2}{3}; d_2 = \frac{2 \times 2}{2+2} = 1;$$

$$d_3 = \frac{2 \times 3}{3+2} = \frac{6}{5}; d_4 = \frac{2 \times 4}{4+2} = \frac{4}{3}$$

$$e_1 = (2-1)^2 = 1; e_2 = (2-2)^2 = 0; e_3 = (2-3)^2 = 1;$$

$$e_4 = (2-4)^2 = 4$$

$$f_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; f_2 = \cos \pi = -1; f_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0;$$

$$f_4 = \cos(2\pi) = 1$$

$$g_1 = 2 \times 1 = 2; g_2 = 2 \times 2 - 1 = 3; g_3 = 2 \times 3 = 6;$$

$$g_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$$

$$h_1 = 2 \times 1 = 2; h_2 = 2 \times 2 = 4; h_3 = 2 \times 3 - 3 = 3;$$

$$h_4 = 2 \times 4 - 3 = 5$$

1.2. Se 41 for termo da sucessão  $(g_n)$  a sua ordem é par, uma vez que se trata de um número ímpar.

$$2n-1=41 \Leftrightarrow 2n=42 \Leftrightarrow n=21$$

Mas, 21 não é um número par, logo 41 não é termo da sucessão  $(g_n)$ .

Se 41 for termo da sucessão  $(h_n)$  a sua ordem é superior a 3.

$$2n-3=41 \Leftrightarrow 2n=44 \Leftrightarrow n=22$$

Assim, 21 é o termo de ordem 22 da sucessão  $(h_n)$ .

$$1.3. a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1-2}{2^{n+1}} = \frac{-1}{2^{n+1}} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo,  $(a_n)$  é decrescente.

$$b_2 - b_1 = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} > 0; b_3 - b_2 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{12} < 0$$

Logo,  $(b_n)$  não é monótona.

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \frac{n+2}{2(n+1)} - \frac{n+1}{2n} = \\ &= \frac{(n+2)n - (n+1)(n+1)}{2n(n+1)} = \\ &= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{2n(n+1)} = \\ &= \frac{-1}{2n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo,  $(c_n)$  é decrescente.

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= \frac{2n+2}{n+3} - \frac{2n}{n+2} = \\ &= \frac{(2n+2)(n+2) - 2n(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \\ &= \frac{2n^2 + 4n + 2n + 4 - 2n^2 - 6n}{(n+3)(n+2)} = \\ &= \frac{4}{(n+3)(n+2)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo,  $(d_n)$  é crescente.

$$e_2 - e_1 = 0 - 1 = -1 < 0; e_3 - e_2 = 1 - 0 = 1 > 0$$

Logo,  $(e_n)$  não é monótona.

$$f_2 - f_1 = -1 - 0 = -1 < 0; f_3 - f_2 = 0 - (-1) = 1 > 0$$

Logo,  $(f_n)$  não é monótona.

Se  $n$  é par, então  $n+1$  é ímpar e tem-se:

$$g_{n+1} - g_n = 2(n+1) - (2n-1) = 2n+2-2n+1 = 3 > 0$$

Se  $n$  é ímpar, então  $n+1$  é par e tem-se:

$$g_{n+1} - g_n = 2(n+1) - 1 - 2n = 2n+2-1-2n = 1 > 0$$

Logo,  $g_{n+1} - g_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $(g_n)$  é crescente.

$$h_2 - h_1 = 4 - 2 = 2 > 0; h_3 - h_2 = 3 - 4 = -1 < 0$$

Logo,  $(h_n)$  não é monótona.

1.4.  $(a_n)$  não é limitada, uma vez que não tem majores.

$$-\frac{1}{2} \leq b_n \leq \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ logo } (b_n) \text{ é limitada.}$$

$$(c_n) \text{ é decrescente e } c_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

$$\text{Assim, } \frac{1}{2} < c_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,  $(c_n)$  é limitada.

$$\begin{aligned} (d_n) \text{ é crescente e } d_n &= \frac{2n}{n+2} = \frac{2n+4-4}{n+2} = \\ &= 2 - \frac{4}{n+1}. \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \frac{2}{3} \leq d_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,  $(d_n)$  é limitada.

$(e_n)$  não é limitada, uma vez que não tem majores.

$$-1 \leq f_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,  $(f_n)$  é limitada.

$(g_n)$  não é limitada, uma vez que não tem majores.

$(h_n)$  não é limitada, uma vez que não tem majores.

$$\begin{aligned} 1.5. c_p = d_p &\Leftrightarrow \frac{p+1}{2p} = \frac{2p}{p+2} \\ &\Leftrightarrow (p+1)(p+2) = 2p \times 2p \\ &\Leftrightarrow p^2 + 3p + 2 = 4p^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3p^2 - 3p - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 24}}{6}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{3 + \sqrt{33}}{6} \vee p = \frac{3 - \sqrt{33}}{6}$$

Ou seja, não existe qualquer número natural  $p$  para o qual  $c_p = d_p$ , pelo que a proposição dada é falsa.

**2.**

**2.1.**  $A = ]1, 3[$

Conjunto dos majorantes:  $[3, +\infty[$

Conjunto dos minorantes:  $] -\infty, 1]$

Máximo: não tem

Mínimo: não tem

**2.2.**  $B = [2, 5[$

Conjunto dos majorantes:  $[5, +\infty[$

Conjunto dos minorantes:  $] -\infty, 2]$

Máximo: não tem

Mínimo: 2

**2.3.**  $C = ]-1, 4]$

Conjunto dos majorantes:  $[4, +\infty[$

Conjunto dos minorantes:  $] -\infty, -1]$

Máximo: 4

Mínimo: não tem

**2.4.**  $D = [2, 7]$

Conjunto dos majorantes:  $[7, +\infty[$

Conjunto dos minorantes:  $] -\infty, 2]$

Máximo: 7

Mínimo: 2

**2.5.**  $E = ]-\infty, 2[$

Conjunto dos majorantes:  $[2, +\infty[$

Conjunto dos minorantes: não tem

Máximo: não tem

Mínimo: não tem

**2.6.**  $F = [1, +\infty[$

Conjunto dos majorantes: não tem

Conjunto dos minorantes:  $] -\infty, 1]$

Máximo: não tem

Mínimo: 1

**3.** Os conjuntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são limitados, porque têm majorantes e minorantes.

O conjunto  $E$  não é limitado, porque não tem minorantes.

O conjunto  $F$  não é limitado, porque não tem majorantes.

**4.**  $A = \{x \in \mathbb{R}: 1 - 3x \leq -2\} = [1, +\infty[$

**Cálculo auxiliar**

$$1 - 3x \leq -2 \Leftrightarrow -3x \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}: -2 + 3x \leq 4\} = ]-\infty, 2]$$

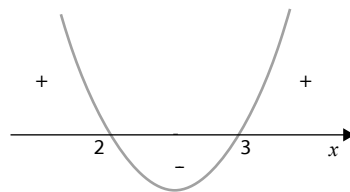
**Cálculo auxiliar**

$$-2 + 3x \leq 4 \Leftrightarrow 3x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 2$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 6 \geq 0\} = ]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$$

**Cálculo auxiliar**

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$



**4.**

**4.1. a)**  $A \cap B = [1, +\infty[ \cap ]-\infty, 2] = [1, 2]$

Conjunto dos minorantes:  $] -\infty, 1]$

Conjunto dos majorantes:  $[2, +\infty[$

**b)**  $A \cup B = [1, +\infty[ \cup ]-\infty, 2] = \mathbb{R}$

Conjunto dos minorantes: não tem

Conjunto dos majorantes: não tem

**c)**  $A \cap \overline{C} = [1, +\infty[ \cap ]2, 3[ = ]2, 3[$

Conjunto dos minorantes:  $] -\infty, 2]$

Conjunto dos majorantes:  $[3, +\infty[$

**d)**  $B \cap C = ]-\infty, 2] \cap (]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[) = ]-\infty, 2]$

Conjunto dos minorantes: não tem

Conjunto dos majorantes:  $[2, +\infty[$

**e)**  $\overline{B} \cap \overline{C} = ]2, +\infty[ \cap ]2, 3[ = ]2, +\infty[$

Conjunto dos minorantes:  $] -\infty, 2]$

Conjunto dos majorantes: não tem

**f)**  $A \cup (\overline{B \cap C}) = [1, +\infty[ \cup [2, +\infty[ = [1, +\infty[$

Conjunto dos minorantes:  $] -\infty, 1]$

Conjunto dos majorantes: não tem

**4.2. a)**  $A \cap B = [1, 2]$

Máximo: 2

Mínimo: 1

**b)**  $A \cup B = \mathbb{R}$

Máximo: não tem

Mínimo: não tem

- c)  $A \cap \overline{C} = ]2, 3[$   
 Máximo: não tem  
 Mínimo: não tem
- d)  $B \cap C = ]-\infty, 2]$   
 Máximo: 2  
 Mínimo: não tem
- e)  $\overline{B} \cup \overline{C} = ]2, +\infty[$   
 Máximo: não tem  
 Mínimo: não tem
- f)  $A \cup (\overline{B \cap C}) = [1, +\infty[$   
 Máximo: não tem  
 Mínimo: 1

5.

5.1.  $P(n): 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

$P(1): 1 = 1^2 \Leftrightarrow 1 = 1$

Logo,  $P(1)$  é verdadeira.

**Hipótese:**  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

**Tese:**  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$

**Demonstração:**

$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1) =$

$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

Logo,  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$ .

5.2.  $P(n): 2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$

$P(1): 2 = \frac{1 \times (3 \times 1 + 1)}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{1 \times 4}{2} \Leftrightarrow 2 = 2$

Logo,  $P(1)$  é verdadeira.

**Hipótese:**  $2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) =$

$= \frac{n(3n+1)}{2}$

**Tese:**  $2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) + (3n+2) =$

$= \frac{(n+1)(3n+4)}{2}$

**Demonstração:**

$2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) + (3n+2) =$

$= \frac{n(3n+1)}{2} + 3n + 2 =$

$= \frac{3n^2 + n + 6n + 4}{2} =$

$= \frac{(n+1)(3n+4)}{2}$

**Cálculo auxiliar**

$3n^2 + 7n + 4 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6}$

$\Leftrightarrow n = -1 \vee n = -\frac{4}{3}$

Assim:

$3n^2 + 7n + 4 = 3(n+1)\left(n + \frac{4}{3}\right) = (n+1)(3n+4)$

Logo,  $2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

5.3.  $P(n): 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) =$   
 $= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$P(1): 1 \times 2 = \frac{1 \times (1+1) \times (1+2)}{3}$

$\Leftrightarrow 2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{3} \Leftrightarrow 2 = 2$

Logo,  $P(1)$  é verdadeira.

**Hipótese:**  $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) =$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

**Tese:**  $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) +$

$+ (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

**Demonstração:**

$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) =$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) =$

$= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} =$

$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

Logo,  $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) =$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

5.4.  $P(n): 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$P(1): 1^2 = \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6}$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} \Leftrightarrow 1 = 1$

Logo,  $P(1)$  é verdadeira.

**Hipótese:**  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**Tese:**  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 =$

$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

**Demonstração:**

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 =$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$

$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)}{6} =$

$= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} =$

$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} =$

$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

**Cálculo auxiliar**

$$2n^2 + 7n + 6 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4}$$

$$\Leftrightarrow n = -2 \vee n = -\frac{3}{2}$$

Assim:

$$2n^2 + 7n + 6 = 2(n+2)\left(n + \frac{3}{2}\right) = (n+2)(2n+3)$$

$$\text{Logo, } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\mathbf{5.5.} P(n): 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$$

$$P(1): 2 = 2(2^1 - 1) \Leftrightarrow 2 = 2 \times 1 \Leftrightarrow 2 = 2$$

Logo,  $P(1)$  é verdadeira.

$$\mathbf{Hipótese:} 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$$

$$\mathbf{Tese:} 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2(2^{n+1} - 1)$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + 2^{n+1} &= 2(2^n - 1) + 2^{n+1} = \\ &= 2(2^n - 1 + 2^n) = \\ &= 2(2 \times 2^n - 1) = \\ &= 2(2^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1), \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\mathbf{5.6.} P(n): 3^n - 1 \text{ é um número par.}$$

$$P(1): 3^1 - 1 = 3 - 1 = 2, \text{ que é um número par.}$$

Logo,  $P(1)$  é verdadeira.

$$\mathbf{Hipótese:} 3^n - 1 \text{ é um número par.}$$

$$\mathbf{Tese:} 3^{n+1} - 1 \text{ é um número par.}$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} 3^{n+1} - 1 &= 3^n \times 3 - 1 = 3^n \times 3 - 3 + 3 - 1 = \\ &= 3 \times (3^n - 1) + 2 \end{aligned}$$

Por hipótese,  $3^n - 1$  é um número par, e, então,  $3 \times (3^n - 1)$  é um número par.

2 também é um número par.

A soma de dois números pares é um número par, logo  $3 \times (3^n - 1) + 2$  é um número par, ou seja,  $3^{n+1} - 1$  é um número par.

Logo,  $3^n - 1$  é um número par,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

$$\mathbf{5.7.} P(n): n^3 - n \text{ é um múltiplo de 3.}$$

$$P(1): 1^3 - 1 = 1 - 1 = 0, \text{ que é um múltiplo de 3.}$$

Logo,  $P(1)$  é verdadeira.

$$\mathbf{Hipótese:} n^3 - n \text{ é um múltiplo de 3.}$$

$$\mathbf{Tese:} (n+1)^3 - (n+1) \text{ é um múltiplo de 3.}$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= (n+1)^2(n+1) - (n+1) = \\ &= (n^2 + 2n + 1)(n+1) - n - 1 = \\ &= n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + n + 1 - n - 1 = \\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n = \\ &= (n^3 - n) + 3n(n+1) \end{aligned}$$

Por hipótese,  $n^3 - n$  é um múltiplo de 3. $3n(n+1)$  também é um múltiplo de 3.

A soma de dois números múltiplos de 3 é ainda um múltiplo de 3, logo,  $(n^3 - n) + 3n(n+1)$  é um múltiplo de 3, ou seja,  $(n+1)^3 - (n+1)$  é um múltiplo de 3.

Logo,  $n^3 - n$  é um múltiplo de 3,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

$$\mathbf{5.8.} P(n): \sum_{i=1}^n (3i^2 + i) = n(n+1)^2$$

$$P(1): \sum_{i=1}^1 (3i^2 + i) = 1(1+1)^2 \Leftrightarrow 3 \times 1^2 + 1 = 1 \times 2^2$$

$$\Leftrightarrow 3 + 1 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$$

Logo,  $P(1)$  é verdadeira.

$$\mathbf{Hipótese:} \sum_{i=1}^n (3i^2 + i) = n(n+1)^2$$

$$\mathbf{Tese:} \sum_{i=1}^{n+1} (3i^2 + i) = (n+1)(n+2)^2$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (3i^2 + i) &= \sum_{i=1}^n (3i^2 + i) + 3(n+1)^2 + (n+1) = \\ &= n(n+1)^2 + 3(n+1)^2 + (n+1) = \\ &= (n+1)[n(n+1) + 3(n+1) + 1] = \\ &= (n+1)(n^2 + n + 3n + 3 + 1) = \\ &= (n+1)(n^2 + 4n + 4) = \\ &= (n+1)(n+2)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \sum_{i=1}^n (3i^2 + i) = n(n+1)^2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

**6.**

$$\mathbf{6.1.} a_1 = 2; a_2 = 5 + 2 = 7; a_3 = 5 + 7 = 12;$$

$$a_4 = 5 + 12 = 17; a_5 = 5 + 17 = 22$$

$$b_1 = 2; b_2 = \frac{1}{2}; b_3 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2; b_4 = \frac{1}{2};$$

$$b_5 = b_3 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$c_1 = 2; c_2 = 3 \times 2 = 6; c_3 = 3 \times 6 = 18;$$

$$c_4 = 3 \times 18 = 54; c_5 = 3 \times 54 = 162$$

$$\mathbf{6.2.} a_{n+1} - a_n = 5 + a_n - a_n = 5 > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,  $(a_n)$  é crescente.

$$b_2 - b_1 < 0; b_3 - b_2 > 0$$

Logo,  $(b_n)$  não é monótona.

$$\text{Tem-se que } \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{3c_n}{c_n} = 3, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ ou seja, } (c_n)$$

é uma progressão geométrica de razão 3.

Uma vez que a razão de  $(c_n)$  é maior que 1 e que  $c_1 = 2 > 0$ , então  $(c_n)$  é crescente.

**7.**

$$\mathbf{7.1.} \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 + u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$7.2. \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$7.3. \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$7.4. \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{3} u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

8.

$$8.1. u_n = u_3 + r(n-3) \Leftrightarrow u_n = -4 + 2(n-3) \\ \Leftrightarrow u_n = -4 + 2n - 6 \\ \Leftrightarrow u_n = 2n - 10$$

$$8.2. u_{10} = u_1 + r(10-1) \Leftrightarrow 28 = 10 + 9r \\ \Leftrightarrow 9r = 18 \\ \Leftrightarrow r = 2$$

Logo:

$$u_n = u_1 + r(n-1) \Leftrightarrow u_n = 10 + 2(n-1) \\ \Leftrightarrow u_n = 10 + 2n - 2 \\ \Leftrightarrow u_n = 2n + 8$$

$$8.3. u_{12} = u_4 + r(12-4) \Leftrightarrow -24 = 8 + 8r \\ \Leftrightarrow 8r = -32 \\ \Leftrightarrow r = -4$$

Logo:

$$u_n = u_4 + r(n-4) \Leftrightarrow u_n = 8 - 4(n-4) \\ \Leftrightarrow u_n = 8 - 4n + 16 \\ \Leftrightarrow u_n = -4n + 24$$

$$8.4. u_2 + u_5 = 12 \Leftrightarrow u_2 + u_2 + r(5-2) = 12 \\ \Leftrightarrow 2u_2 + 3 \times 3 = 12 \\ \Leftrightarrow 2u_2 = 12 - 9 \\ \Leftrightarrow u_2 = \frac{3}{2}$$

Logo:

$$u_n = u_2 + r(n-2) \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{2} + 3(n-2) \\ \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{2} + 3n - 6 \\ \Leftrightarrow u_n = 3n - \frac{9}{2}$$

9.

$$9.1. \sum_{i=1}^{20} (2i+1) = \frac{(2 \times 1 + 1) + (2 \times 20 + 1)}{2} \times 20 = \\ = \frac{3 + 41}{2} \times 20 = 440$$

$$9.2. \sum_{i=1}^{17} \left( \frac{i+1}{5} \right) = \frac{\frac{1+1}{5} + \frac{17+1}{5}}{2} \times 17 = \\ = \frac{2+18}{10} \times 17 = 34$$

$$9.3. \sum_{i=5}^{15} (3i-5) = \frac{(3 \times 5 - 5) + (3 \times 15 - 5)}{2} \times 11 = \\ = \frac{10 + 40}{2} \times 11 = 275$$

$$9.4. \sum_{i=12}^{37} \left( \frac{i-3}{2} \right) = \frac{\frac{12-3}{2} + \frac{37-3}{2}}{2} \times 26 = \\ = \frac{9 + 34}{4} \times 26 = 559$$

10.

$$10.1. u_{16} = u_3 + (16-3)r \Leftrightarrow 59 = 7 + 13r \\ \Leftrightarrow 13r = 52 \\ \Leftrightarrow r = 4$$

Logo:

$$u_n = u_3 + (n-3)r \Leftrightarrow u_n = 7 + (n-3) \times 4 \\ \Leftrightarrow u_n = 7 + 4n - 12 \\ \Leftrightarrow u_n = 4n - 5$$

$$10.2. u_n = 131 \Leftrightarrow 4n - 5 = 131 \Leftrightarrow 4n = 136 \Leftrightarrow n = 34$$

Logo, 131 é o termo de ordem 34 da progressão aritmética  $(u_n)$ .

$$u_n = 313 \Leftrightarrow 4n - 5 = 313 \Leftrightarrow 4n = 318 \Leftrightarrow n = 79,5$$

Como  $79,5 \notin \mathbb{N}$ , então 313 não é um termo da progressão aritmética  $(u_n)$ .

$$10.3. u_3 + u_4 + \dots + u_{16} = \frac{u_3 + u_{16}}{2} \times 14 = \\ = \frac{7 + 59}{2} \times 14 = 462$$

11.

$$11.1. u_{n+1} - u_n = u_n + 3 - u_n = 3, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que 3 é uma constante, fica provado que  $(u_n)$  é uma progressão aritmética de razão 3.

$$11.2. \text{Como a razão desta progressão aritmética é positiva, então } (u_n) \text{ é crescente.}$$

$$11.3. u_n = 2 + (n-1)3 \Leftrightarrow u_n = 2 + 3n - 3 \Leftrightarrow u_n = 3n - 1$$

$$11.4. u_5 + u_6 + \dots + u_{20} = \frac{u_5 + u_{20}}{2} \times 16 = \\ = \frac{(3 \times 5 - 1) + (3 \times 20 - 1)}{2} \times 16 = \\ = \frac{14 + 59}{2} \times 16 = \\ = 584$$

$$11.5. S = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = \frac{2 + 3n - 1}{2} \times n = \\ = \frac{1 + 3n}{2} \times n = \\ = \frac{3n^2 + n}{2}$$

$$\begin{aligned}
11.6. S = 1650 &\Leftrightarrow \frac{3n^2 + n}{2} = 1650 \\
&\Leftrightarrow 3n^2 + n = 3300 \\
&\Leftrightarrow 3n^2 + n - 3300 = 0 \\
&\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 12 \times 3300}}{6} \\
&\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm 199}{6} \\
&\Leftrightarrow n = -\frac{100}{3} \vee n = 33
\end{aligned}$$

Uma vez que  $n$  é um número natural, tem-se então que  $n = 33$ .

## 12.

12.1. A figura 1 é formada por 4 triângulos.

A figura 2 é formada por 8 ( $= 4 + 4$ ) triângulos.

A figura 3 é formada por 12 ( $= 8 + 4$ ) triângulos.

Logo, a figura 10 será formada por  $12 + 4 \times 7 = 40$  triângulos.

$$12.2. a) \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 4, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

b)  $u_{n+1} - u_n = u_n + 4 - u_n = 4, \forall n \in \mathbb{N}$   
Uma vez que 4 é uma constante, fica provado que  $(u_n)$  é uma progressão aritmética de razão 4.

$$c) u_n = 4 + 4(n-1) \Leftrightarrow u_n = 4 + 4n - 4 \Leftrightarrow u_n = 4n$$

$$d) S = \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = \frac{4 + 4 \times 20}{2} \times 20 = 840 \text{ triângulos.}$$

## 13.

$$13.1. u_n = u_3 \times r^{n-3} \Leftrightarrow u_n = 8 \times (-3)^{n-3}$$

$$13.2. u_5 = u_2 \times r^{5-2} \Leftrightarrow -\frac{1}{16} = 4 \times r^3$$

$$\Leftrightarrow r^3 = -\frac{1}{64}$$

$$\Leftrightarrow r = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Logo, } u_n = u_2 \times r^{n-2} \Leftrightarrow u_n = 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}.$$

$$13.3. u_8 = u_4 \times r^{8-4} \Leftrightarrow 96 = 6 \times r^4$$

$$\Leftrightarrow r^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow r = 2 \vee r = -2$$

Como  $(u_n)$  é crescente, então  $r = 2$ .

$$\text{Logo, } u_n = u_4 \times r^{n-4} \Leftrightarrow u_n = 6 \times 2^{n-4}.$$

$$13.4. u_9 = u_7 \times r^{9-7} \Leftrightarrow 18 = 9 \times r^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{2} \vee r = -\sqrt{2}$$

Como  $(u_n)$  é crescente, então  $r = \sqrt{2}$ .

$$\text{Logo, } u_n = u_7 \times r^{n-7} \Leftrightarrow u_n = 9 \times (\sqrt{2})^{n-7}.$$

## 14.

$$14.1. a_1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} = r$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10} a_i &= \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{3}} = \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{\frac{2}{3}} = \\
&= \frac{1 - \frac{1}{59049}}{2} = \\
&= \frac{59048}{118098}
\end{aligned}$$

$$14.2. a_5 = a_2 \times r^{5-2} \Leftrightarrow 80 = 10 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$$

Assim,  $a_n = a_2 \times r^{n-2} \Leftrightarrow a_n = 10 \times 2^{n-2}$  e, portanto,  $a_1 = 10 \times 2^{-1} = 5$ .

Logo:

$$\sum_{i=1}^{10} a_i = 5 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 5115$$

$$14.3. a_4 = a_1 \times r^{4-1} \Leftrightarrow 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{3}{8}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=4}^{13} a_i &= -\frac{3}{8} \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \\
&= -\frac{3}{8} \times \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{3}{2}} = \\
&= -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{1024}\right) = \\
&= -\frac{1023}{4096}
\end{aligned}$$

$$14.4. a_{12} = a_{10} \times r^{12-10} \Leftrightarrow 10 = 20 \times r^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{1}{2}} \vee r = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee r = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como  $r > 0$ , então  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Logo:

$$\begin{aligned}\sum_{i=10}^{19} a_i &= 20 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= 20 \times \frac{1 - \frac{1}{32}}{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} = \\ &= 20 \times \frac{(32 - 1) \times 2}{32(2 - \sqrt{2})} = \\ &= \frac{155}{4(2 - \sqrt{2})} = \\ &= \frac{155}{4(2 - \sqrt{2})} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \\ &= \frac{155(2 + \sqrt{2})}{8}\end{aligned}$$

**15.**

**15.1.**  $u_8 = u_3 \times r^{8-3} \Leftrightarrow 480 = 15 \times r^5 \Leftrightarrow r^5 = 32 \Leftrightarrow r = 2$

Assim:

$$u_n = u_3 \times r^{n-3} \Leftrightarrow u_n = 15 \times 2^{n-3}$$

**15.2.**  $u_n = 120 \Leftrightarrow 15 \times 2^{n-3} = 120$

$$\Leftrightarrow 2^{n-3} = 8$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-3} = 2^3$$

$$\Leftrightarrow n - 3 = 3$$

$$\Leftrightarrow n = 6$$

Logo, 120 é o termo de ordem 6 da sucessão  $(u_n)$ .

**15.3.**  $u_3 + u_4 + \dots + u_{16} = 15 \times \frac{1 - 2^{14}}{1 - 2} = -15(1 - 16384) =$   
 $= 245\,745$

**16.**

**16.1.**  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3u_n}{u_n} = 3, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que 3 é uma constante, fica provado que  $(u_n)$  é uma progressão geométrica de razão 3.

**16.2.** Como  $u_1 = 2 > 0$  e  $r = 3 > 1$ , então  $(u_n)$  é crescente.

**16.3.**  $u_n = 2 \times 3^{n-1}$

**16.4.**  $u_5 + u_6 + \dots + u_{14} = 2 \times 3^{5-1} \times \frac{1 - 3^{10}}{1 - 3} =$   
 $= -3^4(1 - 3^{10}) =$   
 $= 4\,782\,888$

**16.5.**  $S = 2 \times \frac{1 - 3^n}{1 - 3} = 2 \times \frac{1 - 3^n}{-2} =$   
 $= -(1 - 3^n) =$   
 $= 3^n - 1$

**16.6.**  $S = 242 \Leftrightarrow 3^n - 1 = 242$

$$\Leftrightarrow 3^n = 243$$

$$\Leftrightarrow 3^n = 3^5$$

$$\Leftrightarrow n = 5$$

**17.**

**17.1.** Pretende-se provar que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{2}{n+5} - 0 \right| < \delta.$$

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

$$\left| \frac{2}{n+5} - 0 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{2}{n+5} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{n+5} < \delta$$

$$\Leftrightarrow 2 < (n+5)\delta \text{ (porque } n+5 > 0, \forall n \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow 2 < n\delta + 5\delta$$

$$\Leftrightarrow n\delta > 2 - 5\delta$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{2 - 5\delta}{\delta}$$

Assim, se  $n > \frac{2 - 5\delta}{\delta}$ , então  $\left| \frac{2}{n+5} \right| < \delta$ , e, portanto,

se  $p > \frac{2 - 5\delta}{\delta}$ , fica provado que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{2}{n+5} \right| < \delta, \text{ ou seja, que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+5} = 0.$$

**17.2.** Pretende-se provar que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n+2}{5n-4} - \frac{1}{5} \right| < \delta.$$

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

$$\left| \frac{n+2}{5n-4} - \frac{1}{5} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{5n+10-5n+4}{25n-20} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{14}{25n-20} \right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{25n-20} < \delta$$

$$\Leftrightarrow 14 < (25n-20)\delta$$

(porque  $25n-20 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ )

$$\Leftrightarrow 14 < 25n\delta - 20\delta$$

$$\Leftrightarrow 25n\delta > 14 + 20\delta$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{14 + 20\delta}{25\delta}$$

Assim, se  $n > \frac{14 + 20\delta}{25\delta}$ , então  $\left| \frac{n+2}{5n-4} - \frac{1}{5} \right| < \delta$ , e,

portanto, se  $p > \frac{14 + 20\delta}{25\delta}$ , fica provado que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n+2}{5n-4} - \frac{1}{5} \right| < \delta, \text{ ou}$$

$$\text{seja, que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{5n-4} = \frac{1}{5}.$$



**17.3.** Pretende-se provar que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow n + 2 > \delta.$$

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

$$n + 2 > \delta \Leftrightarrow n > -2 + \delta$$

Assim, se  $n > -2 + \delta$ , então  $n + 2 > \delta$ , e, portanto,

se  $p > -2 + \delta$ , fica provado que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow n + 2 > \delta, \text{ ou seja, que}$$

$$\lim (n + 2) = +\infty.$$

**17.4.** Pretende-se provar que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists p \in \mathbb{N}$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow -(n + 3) > \delta.$$

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

$$-(n + 3) > \delta \Leftrightarrow n - 3 > \delta$$

$$\Leftrightarrow n > 3 + \delta$$

Assim, se  $n > 3 + \delta$ , então  $-(n + 3) > \delta$ , e, portanto,

se  $p > 3 + \delta$ , fica provado que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow -(n + 3) > \delta, \text{ ou seja, que}$$

$$\lim (-n + 3) = -\infty.$$

$$\begin{aligned} 18. |u_n - 2| < 10^{-2} &\Leftrightarrow \left| \frac{2n+3}{n+2} - 2 \right| < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{2n+3-2n-4}{n+2} \right| < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{-1}{n+2} \right| < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow n+2 > 100 \\ &\Leftrightarrow n > 98 \end{aligned}$$

Logo, a menor ordem a partir da qual os termos de  $(u_n)$  são valores aproximados de 2 com erro inferior a  $10^{-2}$  é 99.

$$\begin{aligned} 19. |u_n - 1| < 10^{-1} &\Leftrightarrow \left| \frac{3n+(-1)^n}{3n} - 1 \right| < \frac{1}{10} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{3n+(-1)^n-3n}{3n} \right| < \frac{1}{10} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{(-1)^n}{3n} \right| < \frac{1}{10} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3n} < \frac{1}{10} \\ &\Leftrightarrow 3n > 10 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Logo, os termos de  $(u_n)$  são valores aproximados de 1 com erro inferior a  $10^{-1}$  a partir do termo de ordem 4.

**20.**

$$\begin{aligned} 20.1. u_{n+1} - u_n &= \frac{-2(n+1)+3}{n+1+4} - \frac{-2n+3}{n+4} = \\ &= \frac{-2n+1}{n+5} - \frac{-2n+3}{n+4} = \\ &= \frac{(-2n+1)(n+4) - (-2n+3)(n+5)}{(n+5)(n+4)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-2n^2 - 8n + n + 4 + 2n^2 + 10n - 3n - 15}{(n+5)(n+4)} = \\ &= \frac{-11}{(n+5)(n+4)} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo,  $(u_n)$  é decrescente.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{3n+3}{n+6} - \frac{3n}{n+5} = \\ &= \frac{(3n+3)(n+5) - 3n(n+6)}{(n+6)(n+5)} = \\ &= \frac{3n^2 + 15n + 3n + 15 - 3n^2 - 18n}{(n+6)(n+5)} = \\ &= \frac{15}{(n+6)(n+5)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo,  $(v_n)$  é crescente.

$$w_1 = -\frac{1}{2}; w_2 = \frac{1}{5}; w_3 = -\frac{1}{10}$$

Uma vez que  $w_2 - w_1 > 0$  e  $w_3 - w_2 < 0$ , então  $(w_n)$  não é monótona.

$$20.2. \lim u_n = \lim \frac{-2n+3}{n+4} = \lim \frac{-2 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{4}{n}} = \frac{-2+0}{1+0} = -2$$

$$\lim v_n = \lim \frac{3n}{n+5} = \lim \frac{3}{1 + \frac{5}{n}} = \frac{3}{1+0} = 3$$

$$\text{Se } n \text{ é par: } \lim w_n = \lim \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{Se } n \text{ é ímpar: } \lim w_n = \lim \frac{-1}{n^2+1} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

Logo,  $\lim w_n = 0$ .

**20.3.** A sucessão  $(u_n)$  é uma sucessão convergente para -2, logo é uma sucessão limitada.

A sucessão  $(v_n)$  é uma sucessão convergente para 3, logo é uma sucessão limitada.

A sucessão  $(w_n)$  é uma sucessão convergente para 0, logo é uma sucessão limitada.

$$\begin{aligned} 20.4. |v_n - 3| < 10^{-2} &\Leftrightarrow \left| \frac{3n}{n+5} - 3 \right| < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{3n-3n-15}{n+5} \right| < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{-15}{n+5} \right| < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow \frac{15}{n+5} < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n+5} < \frac{1}{1500} \\ &\Leftrightarrow n+5 > 1500 \\ &\Leftrightarrow n > 1495 \end{aligned}$$

Logo, o termo a partir do qual os termos da sucessão  $(v_n)$  pertencem a  $V_{10^{-2}}(3)$  é  $u_{1495} = \frac{299}{100}$ .

21.

$$21.1. \lim u_n = \lim (n^2 - 1) = +\infty$$

$$21.2. \lim v_n = \lim (-n^3 - 1) = -\infty$$

$$21.3. \lim w_n = \lim (-3n^2 + 1) = -\infty$$

$$21.4. \lim z_n = \lim \frac{1}{3n+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$21.5. \lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{n^2-1}{-n^3-1} = \lim \frac{1-\frac{1}{n^2}}{-n-\frac{1}{n^2}} = \frac{1-0}{-\infty-0} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$21.6. \lim \frac{u_n}{w_n} = \lim \frac{n^2-1}{-3n^2+1} = \lim \frac{1-\frac{1}{n^2}}{-3+\frac{1}{n^2}} = \frac{1-0}{-3+0} = -\frac{1}{3}$$

$$21.7. \lim \frac{v_n}{w_n} = \lim \frac{-n^3-1}{-3n^2+1} = \lim \frac{-n-\frac{1}{n^2}}{-3+\frac{1}{n^2}} = \frac{-\infty-0}{-3+0} = \frac{-\infty}{-3} = +\infty$$

$$21.8. \lim (u_n \times z_n) = \lim \left[ (n^2-1) \times \frac{1}{3n+1} \right] = \lim \frac{n^2-1}{3n+1} = \lim \frac{n-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{-\infty-0}{-3+0} = +\infty$$

$$21.9. \lim (u_n + v_n) = \lim [(n^2-1) + (-n^3-1)] = \lim (-n^3 + n^2 - 2) = \lim \left[ n^3 \left( -1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^3} \right) \right] = +\infty(-1+0+0) = -\infty$$

22.

$$22.1. \lim \frac{n-3}{2n+1} = \lim \frac{1-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

$$22.2. \lim \frac{n^2-3}{2n+1} = \lim \frac{n-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{+\infty-0}{2+0} = +\infty$$

$$22.3. \lim \frac{n-3}{2n^2+1} = \lim \frac{\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{0-0}{1+0} = 0$$

$$22.4. \lim \frac{n^2+2n+1}{n^2+1} = \lim \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0+0}{1+0} = 1$$

$$22.5. \lim \frac{2n^2+n}{\sqrt{n^4+1}} = \lim \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} = \frac{2+0}{\sqrt{1+0}} = 2$$

$$22.6. \lim \left( 2 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 2+0=2$$

$$22.7. \lim \left( \frac{n+1}{3n-5} \right)^2 = \left( \lim \frac{n+1}{3n-5} \right)^2 = \lim \left( \frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{5}{n}} \right)^2 = \left( \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$22.8. \lim \left( \frac{n+2}{3n^2-2} \times \frac{n}{2} \right) = \lim \frac{n^2+2n}{6n^2-4} = \lim \frac{1+\frac{2}{n}}{6-\frac{4}{n^2}} = \frac{1+0}{6+0} = \frac{1}{6}$$

$$22.9. \lim \left( \frac{n^2+3}{2n-1} \times \frac{1}{n^2} \right) = \lim \frac{n^2+3}{2n^3-n^2} = \lim \frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{0+0}{2-0} = 0$$

$$22.10. \lim \left( \frac{n+2}{3n^2-2} : \frac{2}{n} \right) = \lim \frac{n^2+2n}{6n^2-4n} = \lim \frac{1+\frac{2}{n}}{6-\frac{4}{n}} = \frac{1+0}{6+0} = \frac{1}{6}$$

$$22.11. \lim \left( \frac{n^2+3}{2n-1} : n^2 \right) = \lim \frac{n^2+3}{2n^3-n^2} = \lim \frac{1+\frac{3}{n^2}}{2n-1} = \frac{1+0}{+\infty-1} = 0$$

$$22.12. \lim \sqrt{\frac{16n^2+7}{n^2}} = \lim \sqrt{\frac{16+\frac{7}{n^2}}{1}} = \sqrt{16} = 4$$

$$22.13. \lim \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+3} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{3}{n}} = \frac{\sqrt{1+0}}{1+0} = 1$$

$$\begin{aligned}
22.14. \lim_{(\infty-\infty)} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) &= \\
&= \lim \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \\
&= \lim \frac{n - n - 1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \\
&= \lim \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \\
&= \frac{-1}{+\infty} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
22.15. \lim_{(\infty-\infty)} (\sqrt{n^2+2} - 2n) &= \\
&= \lim \frac{(\sqrt{n^2+2} - 2n)(\sqrt{n^2+2} + 2n)}{\sqrt{n^2+2} + 2n} = \\
&= \lim \frac{n^2 + 2 - 4n^2}{\sqrt{n^2+2} + 2n} = \\
&= \lim \frac{2 - 3n^2}{\sqrt{n^2+2} + 2n} = \\
&= \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \frac{\frac{2}{n} - 3n}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + 2} = \\
&= \frac{0 - \infty}{1 + 2} = \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
22.16. \lim_{(\infty-\infty)} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}) &= \\
&= \lim \frac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \\
&= \lim \frac{n^2+1 - n^2+1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \\
&= \lim \frac{2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \\
&= \frac{2}{+\infty} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$22.17. \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} = 0 \times \frac{1}{3} = 0$$

$$22.18. \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \frac{3^n}{2^{n+1}} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} = +\infty \times \frac{1}{2} = +\infty$$

$$22.19. \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \frac{2^n + 5^n}{3^n} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \left(\frac{5}{3}\right)^n = 0 + \infty = +\infty$$

$$22.20. \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \frac{3^n}{3^n + 4^n} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

$$\begin{aligned}
22.21. \lim_{(\infty-\infty)} (3^{n+1} - 2^n) &= \lim_{(\infty-\infty)} \left[ 3^n \left( 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) \right] = \\
&= +\infty(3 - 0) = +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
22.22. \lim_{(\infty-\infty)} (2^{n+1} - 3^n) &= \lim_{(\infty-\infty)} \left[ 3^n \left( \left(\frac{2}{3}\right)^n \times 2 - 1 \right) \right] = \\
&= +\infty(0 \times 2 - 1) = -\infty
\end{aligned}$$

**23.**

$$\begin{aligned}
23.1. S_{n-1} &= 15(n-1) - 2(n-1)^2 = \\
&= 15n - 15 - 2(n^2 - 2n + 1) = \\
&= 15n - 15 - 2n^2 + 4n - 2 = \\
&= -2n^2 + 19n - 17
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
23.2. u_n = S_n - S_{n-1} &= 15n - 2n^2 - (-2n^2 + 19n - 17) = \\
&= 15n - 2n^2 + 2n^2 - 19n + 17 = \\
&= -4n + 17
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
23.3. u_{n+1} - u_n &= -4(n+1) + 17 - (-4n + 17) = \\
&= -4n - 4 + 17 + 4n - 17 = \\
&= -4, \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Uma vez que  $-4$  é uma constante, fica provado que  $(u_n)$  é uma progressão aritmética de razão  $-4$ .

$$24. \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{\sqrt{2}}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Logo,  $(u_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  e o seu primeiro termo é  $a$ .

A soma de todos os termos desta progressão é dada por:

$$\begin{aligned}
\lim S &= \lim \left[ a \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \right] = \\
&= a \lim \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \\
&= a \lim \frac{\sqrt{2} \left( 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \right)}{\sqrt{2}-1} = \\
&= a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \lim \left( 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \right) = \\
&= \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} (1-0) = \\
&= \frac{2a + \sqrt{2}a}{2-1} = \\
&= 2a + \sqrt{2}a = \\
&= a(2 + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

25.

25.1. Se  $n < 4$ :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3 - (n+1) - (3-n) = \\ &= 3 - n - 1 - 3 + n = \\ &= -1 < 0 \end{aligned}$$

Se  $n > 4$ :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{n+1} - 2 - \left( \frac{2}{n} - 2 \right) = \\ &= \frac{2}{n+1} - 2 - \frac{2}{n} + 2 = \\ &= \frac{2n - 2(n+1)}{(n+1)n} = \\ &= \frac{2n - 2n - 2}{(n+1)n} = \\ &= \frac{-2}{(n+1)n} < 0 \end{aligned}$$

Se  $n = 4$ :

$$u_4 - u_3 = \frac{2}{4} - 2 - (3 - 3) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} < 0$$

Logo,  $u_{n+1} - u_n < 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $(u_n)$  é decrescente.

25.2. Pretende-se provar que  $\lim u_n = -2$ , ou seja,

$$\lim \left( \frac{2}{n} - 2 \right) = -2, \text{ isto é, } \forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}:$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{2}{n} - 2 + 2 \right| < \delta.$$

Se  $\delta \in \mathbb{R}^+$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{2}{n} - 2 + 2 \right| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{2}{n} \right| < \delta \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{2}{n} \right| < \delta \\ &\Leftrightarrow 2 < n\delta \text{ (porque } n \in \mathbb{N}) \\ &\Leftrightarrow n\delta > 2 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{2}{\delta} \end{aligned}$$

Assim, se  $n > \frac{2}{\delta}$ , então  $\left| \frac{2}{n} - 2 + 2 \right| < \delta$ , e, portanto,

se  $p > \frac{2}{\delta}$ , fica provado que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{2}{n} - 2 + 2 \right| < \delta.$$

25.3. Uma vez que  $(u_n)$  é uma sucessão convergente, então é uma sucessão limitada.

26.

$$\begin{aligned} 26.1. \lim \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) &= \\ &= \lim \left( 1 \times \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \\ &= \lim \left( 2 \times \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \times (1 - 0) = \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26.2. \lim \frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}{2n^2} &= \lim \frac{\frac{2+2n}{2} \times n}{2n^2} = \\ &= \lim \frac{(1+n)n}{2n^2} = \lim \frac{n+n^2}{2n^2} = \\ &= \lim \frac{\frac{1}{n} + 1}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26.3. \lim \frac{\frac{3}{2} + \frac{9}{2} + \frac{27}{2} + \dots + \frac{3^n}{2}}{3^n} &= \\ &= \lim \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1-3^{n+1}}{1-3}}{3^n} = \\ &= \lim \frac{-\frac{3}{4} (1-3^{n+1})}{3^n} = \\ &= \lim \left( \frac{3}{4} \times \frac{3^{n+1}-1}{3^n} \right) = \\ &= \frac{3}{4} \lim \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right) = \\ &= \frac{3}{4} (1 - 0) = \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

27.

$$\begin{aligned} 27.1. u_n &= \frac{\left( \frac{1}{2} \right)^n + \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1}}{2} \times 1 = \frac{2^{-n} + 2^{-n-1}}{2} \\ &= \frac{2^{-n}(1+2^{-1})}{2} = \\ &= 2^{-n-1} \times \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = \\ &= 2^{-n-1} \times \frac{3}{2} = \\ &= 3 \times 2^{-n-2} \end{aligned}$$

$$27.2. \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 2^{-n-1-2}}{3 \times 2^{-n-2}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que  $\frac{1}{2}$  é uma constante, fica provado que  $(u_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned} 27.3. u_1 &= 3 \times 2^{-1-2} = 3 \times 2^{-3} = \frac{3}{8} \\ S &= \lim \left( \frac{3}{8} \times \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \\ &= \frac{3}{8} \times 2 \lim \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right) = \frac{3}{4} \times (1 - 0) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

28.

$$28.1. \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{0,1u_{n-1}}{u_{n-1}} = 0,1 \text{ (constante)}$$

Logo,  $(u_n)$  é uma progressão geométrica de razão 0,1.

$$28.2. S_p = 0,2 \times \frac{1-0,1^p}{1-0,1} = \frac{2}{9} (1-0,1^p)$$

$$28.3. \lim S_n = \lim \frac{2}{9} (1-0,1^n) = \frac{2}{9} (1-0) = \frac{2}{9}$$

Representa a soma dos termos de uma progressão geométrica de comprimento  $n$ , de primeiro termo 0,2 e razão 0,1.

29.

$$29.1. \widehat{ACB} = \widehat{BDC} = 90^\circ$$

Uma vez que  $AB$  é paralela a  $CD$  e  $BC$  é concorrente a ambas, então  $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$ .

Logo, os triângulos  $[ACB]$  e  $[BDC]$  têm dois ângulos correspondentes com as mesmas amplitudes, pelo que são triângulos semelhantes.

A razão de semelhança entre estes dois triângulos é  $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$ .

29.2. Procedendo de forma semelhante à alínea anterior, prova-se que, com a construção de cada segmento, se obtém um novo triângulo semelhante aos anteriores e cuja razão de semelhança em relação ao que lhe é imediatamente anterior é  $\frac{1}{2}$ .

Assim, pode concluir-se que cada novo segmento tem comprimento igual a metade do comprimento do segmento anterior.

Seja  $(u_n)$  a sucessão dos comprimentos dos segmentos da linha poligonal, onde  $n$  representa a ordem de construção de cada segmento.

De acordo com a alínea anterior,  $u_1 = 2$  e

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{2}u_n}{u_n} = \frac{1}{2}$ , ou seja,  $(u_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$ .

Assim, o comprimento da linha poligonal caso esta tenha 8 segmentos é dado por:

$$S_8 = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{127}{64}.$$

$$29.3. \lim S_n = \lim \left( 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2 \times \frac{1-0}{\frac{1}{2}} = 4$$

Representa o dobro do comprimento do primeiro segmento de reta.

30.

30.1. a) Seja  $P(n): u_n > 1$ .

$$P(1): u_1 > 1 \Leftrightarrow 3 > 1$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $u_n > 1$

**Tese:**  $u_{n+1} > 1$

**Demonstração:**

$$\text{Como, por hipótese, } u_n > 1 \Leftrightarrow 2u_n - 1 > 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2u_n - 1} > 1$$

Logo,  $u_{n+1} > 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

b) Seja  $P(n): u_{n+1} < u_n$ .

$$P(1): u_2 < u_1 \Leftrightarrow \sqrt{2u_1 - 1} < u_1 \Leftrightarrow \sqrt{5} < 3$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $u_{n+1} < u_n$

**Tese:**  $u_{n+2} < u_{n+1}$

**Demonstração:**

$$u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow 2u_{n+1} < 2u_n \\ \Leftrightarrow 2u_{n+1} - 1 < 2u_n - 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2u_{n+1} - 1} < \sqrt{2u_n - 1} \\ \Leftrightarrow u_{n+2} < u_{n+1}$$

Logo,  $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $(u_n)$  é decrescente.

30.2. Das alíneas anteriores resulta que  $(u_n)$  é uma sucessão monótona e limitada, pelo que é convergente.

Seja  $L = \lim u_n$ .

$$\text{Então, } L = \lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2u_n - 1} = \sqrt{2L - 1}.$$

Ou seja:

$$L = \sqrt{2L - 1} \Leftrightarrow L^2 = 2L - 1 \\ \Leftrightarrow L^2 - 2L + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (L - 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow L - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow L = 1$$

31.

31.1. Pretende-se mostrar que existe um valor de  $u_1$  para o qual a sucessão é constante, ou seja, para o qual  $u_{n+1} - u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$3u_{n+1} = 2u_n + 1 \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}$$

$$\text{Então, } u_2 - u_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} - u_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{3}u_1 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1$$

Suponha-se então, que  $u_1 = 1$ . Por indução, demonstra-se que para este valor de  $u_1$  se tem  $u_{n+1} - u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Seja  $P(n): u_{n+1} - u_n = 0$

$$\begin{aligned} P(1): u_2 - u_1 = 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} - u_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $u_{n+1} - u_n = 0$

**Tese:**  $u_{n+2} - u_{n+1} = 0$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= \left(\frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}\right) = \\ &= \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n) = \\ &= \frac{2}{3} \times 0 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo,  $u_{n+1} - u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , ou seja, se  $u_1 = 1$ , então a sucessão é constante.

**31.2.** Sabemos que  $3u_{n+1} = 2u_n + 1$ .

Então:

$$u_1 = 2$$

$$u_2 = \frac{5}{3}$$

$$u_3 = \frac{13}{9}$$

Como  $v_n = u_n - h$ , tem-se:

$$v_1 = 2 - h$$

$$v_2 = \frac{5}{3} - h$$

$$v_3 = \frac{13}{9} - h$$

Para que a sucessão  $(v_n)$  seja uma progressão geométrica,  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  tem de ser constante, para qualquer valor de  $n$ , sendo  $n \in \mathbb{N}$ , logo, em particular:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_2}{v_1} = k \\ \frac{v_3}{v_2} = k \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{5}{3} - h}{2 - h} = k \\ \frac{\frac{13}{9} - h}{\frac{5}{3} - h} = k \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{5 - 3h}{6 - 3h} = k \\ \frac{13 - 9h}{15 - 9h} = k \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{13 - 9h}{15 - 9h} = \frac{5 - 3h}{6 - 3h} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (13 - 9h)(6 - 3h) = (5 - 3h)(15 - 9h) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 27h^2 - 93h + 78 = 27h^2 - 90h + 75 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3h = 3 \\ k = \frac{5-3}{6-3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} h = 1 \\ k = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Falta apenas verificar que  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  é constante  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = \frac{\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} - 1}{\frac{2}{3}u_n - 1} = \\ &= \frac{\frac{2}{3}(u_n - 1)}{u_n - 1} = \\ &= \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo,  $h = 1$ .

**31.3.** Da alínea anterior, vem que  $h = 1$  e  $k = \frac{2}{3}$ , onde  $k$  representa a razão da progressão geométrica  $(v_n)$ . Além disso,  $v_1 = 2 - 1 = 1$ .

Então:

$$v_n = v_1 \times k^{n-1} \Leftrightarrow v_n = 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Como  $v_n = u_n - h \Leftrightarrow u_n = v_n + h$ , então

$$u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{31.4.} \quad S_p &= \sum_{n=1}^p u_n = \sum_{n=1}^p \left( \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1 \right) = \\ &= \sum_{n=1}^p \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^p 1 = \\ &= 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p}{1 - \frac{2}{3}} + p = \\ &= 3 \left( 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p \right) + p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_p &= \sum_{n=1}^p v_n = \sum_{n=1}^p \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p}{1 - \frac{2}{3}} = \\ &= 3 \left( 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim S_p &= \lim \left[ 3 \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^p \right) + p \right] = \\ &= 3 \times (1 - 0) + \infty = \\ &= +\infty \\ \lim S'_p &= \lim \left[ 3 \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^p \right) \right] = 3 \times (1 - 0) = 3\end{aligned}$$

## Tema IV - Funções Reais de Variável Real

Páginas 50 a 59

1.

$$1.1. f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$$

$$\bullet D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \wedge x + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \wedge x \neq -1$$

$\Leftrightarrow x = -1 \wedge x \neq -1$ , que é uma condição impossível.

Logo,  $f$  não tem zeros.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)^2}{x + 1} = x + 1$$

$$\text{Assim, } f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-1, +\infty[ \text{ e}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1[.$$

$$1.2. h(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 5x + 6}$$

$$\bullet D_h = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 5x + 6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$$

**Cálculo auxiliar**

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -2$$

$$\bullet h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 5x + 6} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \wedge x^2 + 5x + 6 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Logo, 1 é um zero de  $h$ .

$x$	$-\infty$	$-3$		$-2$		$1$	$+\infty$
$x^2 - 2x + 1$	+	+	+	+	+	0	+
$x^2 + 5x + 6$	+	0	-	0	+	+	+
$h(x)$	+	n.d.	-	n.d.	+	0	+

Assim:

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -3[ \cup ]-2, 1[ \cup ]1, +\infty[ \text{ e}$$

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-3, -2[$$

$$1.3. i(x) = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{5}{x^2-4}$$

$$\bullet D_i = \{x \in \mathbb{R}: (x-2)^2 \neq 0 \wedge x^2-4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$\bullet i(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{5}{x^2-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2-5(x-2)}{(x-2)^2(x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x+12}{(x-2)^2(x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x+12 = 0 \wedge (x-2)^2(x+2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Logo, 3 é um zero de  $i$ .

$x$	$-\infty$	$-2$		$2$		$3$	$+\infty$
$-4x+12$	+	+	+	+	+	0	-
$(x-2)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$i(x)$	-	n.d.	+	0	+	0	-

Assim:

$$i(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2[ \cup ]3, +\infty[$$

$$\text{e } i(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-2, 2[ \cup ]2, 3[$$

$$1.4. k(x) = \frac{x^3-1}{x+1} + \frac{1}{x} - \frac{x^3+1}{x-1}$$

$$\bullet D_k = \{x \in \mathbb{R}: x+1 \neq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

$$\bullet k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3-1}{x+1} + \frac{1}{x} - \frac{x^3+1}{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^3-1)x(x-1) + (x-1)(x+1) - (x^3+1)x(x+1)}{(x+1)x(x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^4 - x^2 - 1}{(x+1)x(x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^4 - x^2 - 1 = 0 \wedge (x+1)x(x-1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{-4}, \text{ que é uma equação im-}$$

possível em  $\mathbb{R}$ .

Logo,  $k$  não tem zeros.

$x$	$-\infty$	$-1$		$0$		$1$	$+\infty$
$-2x^4 - x^2 - 1$	-	-	-	-	-	-	-
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+
$x$	-	-	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+
$k(x)$	+	n.d.	-	n.d.	+	n.d.	-

Assim:

$$k(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1[ \cup ]0, 1[$$

$$e \ k(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-1, 0[ \cup ]1, +\infty[$$

2.

$$\begin{aligned} 21. \ x + 3 &= \frac{3}{x-1} \Leftrightarrow x + 3 - \frac{3}{x-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x - x - 3 - 3}{x-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 6}{x-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 6 = 0 \wedge x-1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+24}}{2} \wedge x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2} \wedge x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{7} \vee x = -1 + \sqrt{7} \end{aligned}$$

$$C.S. = \{-1 - \sqrt{7}, -1 + \sqrt{7}\}$$

$$\begin{aligned} 22. \ \frac{x-2}{2} + \frac{x+1}{2-x} &= \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} + \frac{x+1}{2-x} - \frac{1}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2(x-2)(2-x) + 4(x+1) - (2-x)}{4(2-x)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 13x - 6}{4(2-x)} = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x^2 + 13x - 6 = 0 \wedge 4(2-x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-13 \pm \sqrt{169-48}}{-4} \wedge x \neq 2 \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 6\right) \wedge x \neq 2 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 6 \\ C.S. &= \left\{\frac{1}{2}, 6\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23. \ \frac{3}{x} - \frac{2}{x-2} &= -1 \Leftrightarrow \frac{3}{x} - \frac{2}{x-2} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x - 6 - 2x + x^2 - 2x}{x(x-2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 6}{x(x-2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \wedge x(x-2) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

$$C.S. = \{-2, 3\}$$

$$\begin{aligned} 24. \ \frac{2}{x^2+2x} - \frac{1}{x} &= \frac{x}{x+2} \Leftrightarrow \frac{2}{x^2+2x} - \frac{1}{x} - \frac{x}{x+2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2-x-2-x^2}{x^2+2x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2-x}{x^2+2x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x(-x-1)}{x(x+2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x-1}{x+2} = 0 \\ &\Leftrightarrow -x-1 = 0 \wedge x+2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

$$C.S. = \{-1\}$$

$$\begin{aligned} 25. \ \frac{x}{x+5} - \frac{x}{x-2} &= \frac{3}{x^2+3x-10} \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{x+5} - \frac{x}{x-2} - \frac{3}{x^2+3x-10} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-x^2-5x-3}{(x+5)(x-2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-7x-3}{(x+5)(x-2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow -7x-3 = 0 \wedge (x+5)(x-2) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{3}{7} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 2$$

$$C.S. = \left\{-\frac{3}{7}\right\}$$

$$\begin{aligned} 26. \ \frac{3}{x-1} - \frac{10}{x^2+3x-4} &= \frac{x}{x+4} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{x-1} - \frac{10}{x^2+3x-4} - \frac{x}{x+4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x+12-10-x^2+x}{(x-1)(x+4)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2+4x+2}{(x-1)(x+4)} = 0 \\ &\Leftrightarrow -x^2+4x+2 = 0 \wedge (x-1)(x+4) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{-2} \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -4 \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -4$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{6} \vee x = 2 + \sqrt{6}$$

#### Cálculo auxiliar

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4$$

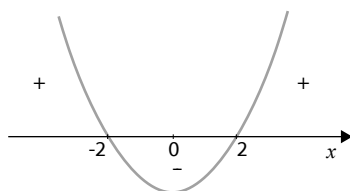
$$\text{C.S.} = [2 - \sqrt{6}, 2 + \sqrt{6}]$$

3.

$$3.1. \frac{-2}{x^2-4} \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0$$

#### Cálculo auxiliar

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$



$$\text{C.S.} = ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$$

$$3.2. \frac{x-1}{-2x+1} \geq 0$$

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+
$-2x+1$	+	0	-	-	-
$\frac{x-1}{-2x+1}$	-	n.d.	+	0	-

$$\text{C.S.} = \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$$

$$3.3. \frac{x^2+4x+3}{x^2-5x+6} \leq 0$$

#### Cálculos auxiliares

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 2$$

$x$	$-\infty$	-3		-1		2		3	$+\infty$
$x^2+4x+3$	+	0	-	0	+	+	+	+	+
$x^2-5x+6$	+	+	+	+	+	0	-	0	+
$\frac{x^2+4x+3}{x^2-5x+6}$	+	0	-	0	+	n.d.	-	n.d.	+

$$\text{C.S.} = [-3, -1] \cup ]2, 3[$$

$$3.4. \frac{x+1}{2x+1} < \frac{1}{x} + 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{x} - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x-2x-1-4x^2-2x}{x(2x+1)} < 0$$

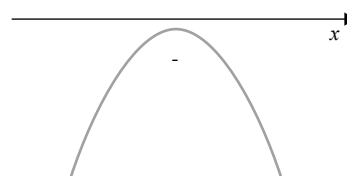
$$\Leftrightarrow \frac{-3x^2-3x-1}{x(2x+1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow x(2x+1) > 0$$

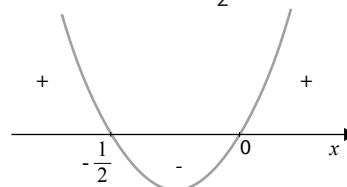
#### Cálculos auxiliares

$$-3x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{-6}, \text{ que é uma}$$

equação impossível em  $\mathbb{R}$ .



$$x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$$



$$\text{C.S.} = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[ \cup ]0, +\infty[$$

$$3.5. \frac{3}{x} - \frac{2}{x-2} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{3}{x} - \frac{2}{x-2} + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-6-2x+x^2-2x}{x(x-2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{x(x-2)} \leq 0$$

#### Cálculo auxiliar

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

$x$	$-\infty$	$-2$		$0$		$2$		$3$	$+\infty$
$x^2 - x - 6$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$x(x-2)$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-x-6}{x(x-2)}$	$+$	$0$	$-$	n.d.	$+$	n.d.	$-$	$0$	$+$

$$\text{C.S.} = [-2, 0[ \cup ]2, 3]$$

$$\begin{aligned} 3.6. 1 - \frac{1}{x+1} &\geq \frac{4}{x^2+x} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x^2+x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+x-x-4}{x^2+x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x^2+x} \geq 0 \end{aligned}$$

#### Cálculos auxiliares

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

$$x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$

$x$	$-\infty$	$-2$		$-1$		$0$		$2$	$+\infty$
$x^2 - 4$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$x^2 + x$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-4}{x^2+x}$	$+$	$0$	$-$	n.d.	$+$	n.d.	$-$	$0$	$+$

$$\text{C.S.} = ]-\infty, -2] \cup ]-1, 0[ \cup [2, +\infty[$$

#### 4.

4.1. Seja  $(x_n)$  uma sucessão tal que  $x_n \rightarrow 1$ .

$$x_n \rightarrow 1$$

$$x_n + 1 \rightarrow 2$$

$$\frac{1}{x_n + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{x_n + 1} \rightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Logo, } f(x_n) \rightarrow \frac{3}{2}, \text{ ou seja, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2}.$$

4.2. Seja  $(x_n)$  uma sucessão tal que  $x_n \rightarrow +\infty$ .

$$x_n \rightarrow +\infty$$

$$x_n + 1 \rightarrow +\infty$$

$$\frac{1}{x_n + 1} \rightarrow 0$$

$$1 + \frac{1}{x_n + 1} \rightarrow 1$$

$$\text{Logo, } f(x_n) \rightarrow 1, \text{ ou seja, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

4.3. Seja  $(x_n)$  uma sucessão tal que  $x_n \rightarrow -1$  e  $x_n > -1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

$$x_n \rightarrow -1^+$$

$$x_n + 1 \rightarrow 0^+$$

$$\frac{1}{x_n + 1} \rightarrow +\infty$$

$$1 + \frac{1}{x_n + 1} \rightarrow +\infty$$

$$\text{Logo, } f(x_n) \rightarrow +\infty, \text{ ou seja, } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty.$$

#### 5.

$$5.1. \lim a_n = \lim \frac{2n+1}{n+2} = \lim \left( 2 - \frac{3}{n+2} \right) = 2^-$$

#### Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} 2n+1 \quad | \quad n+2 \\ -2n-4 \quad 2 \\ \hline -3 \end{array}$$

$$\text{Logo, } \lim f(a_n) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2.$$

$$5.2. \lim b_n = \lim \frac{-n+1}{n+2} = \lim \left( -1 + \frac{3}{n+2} \right) = -1^+$$

#### Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} -n+1 \quad | \quad n+2 \\ n+2 \quad -1 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\text{Logo, } \lim f(b_n) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1.$$

$$5.3. \lim c_n = \lim \frac{-n-2}{n+1} = \lim \left( -1 - \frac{1}{n+1} \right) = -1^-$$

#### Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} -n-2 \quad | \quad n+1 \\ n+1 \quad -1 \\ \hline -1 \end{array}$$

$$\text{Logo, } \lim f(c_n) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2.$$

$$5.4. \lim d_n = \lim \frac{-2n+1}{n+2} = \lim \left( -2 + \frac{5}{n+2} \right) = -2^+$$

#### Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} -2n+1 \quad | \quad n+2 \\ +2n+4 \quad -2 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\text{Logo, } \lim f(d_n) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 3.$$

$$5.5. \lim u_n = \lim \frac{-n^2+1}{n+2} = \lim \frac{-n + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = -\infty$$

$$\text{Logo, } \lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

$$5.6. \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = +\infty$$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(v_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

6.

$$6.1. \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$$

$$6.2. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$6.3. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$6.4. \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)]^2 = 0^2 = 0$$

$$6.5. \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{f(x)} = \sqrt{4} = 2$$

$$6.6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$6.7. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

7.

$$7.1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x^2 + 2) = \lim_{(\infty - \infty) \quad x \rightarrow -\infty} \left[ x^3 \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} \right) \right] =$$

$$= -\infty(1 + 0 + 0) =$$

$$= -\infty$$

$$7.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{+\infty}{1} =$$

$$= +\infty$$

$$7.3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{2(x-1)(x+1)} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{2}{x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$7.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{x - 4 + \frac{3}{x}} =$$

$$= \frac{2 + 0}{+\infty - 4 + 0} =$$

$$= 0$$

$$7.5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x} - x \right) = \lim_{(\infty - \infty) \quad x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 - 1 - x^2}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} =$$

$$= \frac{-1}{-\infty} =$$

$$= 0$$

$$7.6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{2}{3x+1}} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) \quad x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{2x+4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{4}{x}} =$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$7.7. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 + 2x}{x+1} \times \frac{1}{3x} \right) = \lim_{(0 \times \infty) \quad x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{3x^2 + 3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{3 + \frac{3}{x}} =$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$7.8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} =$$

$$= 0$$

$$7.9. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-4}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-2)(x+2)}{-x+2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [-(x+2)] =$$

$$= +\infty$$

$$7.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}) =$$

$$= \lim_{(\infty - \infty) \quad x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1-x-1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} =$$

$$= \frac{-2}{+\infty} =$$

$$= 0$$

$$7.11. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}$$

**7.12.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2}} =$

$$= \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

**8.**

**8.1.**  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 1) = 1 + 2 + 1 = 4$

**8.2.**  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{x+1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$$

**8.3.**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

**8.4.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 0} (x^2 + 2x + 1) = 1$

**8.5.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 3x + 2)}{(x-1)(x+1)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x+1} =$$

$$= \frac{1+3+2}{1+1} =$$

$$= 3$$

**Cálculo auxiliar**

	1	2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	0

**8.6.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)(x^2 + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x^2 + 1)} =$$

$$= \frac{1+1+1}{2 \times 2} =$$

$$= \frac{3}{4}$$

**Cálculo auxiliar**

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0

**8.7.**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - 2} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)\sqrt{x} + 2}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} [(x+2)\sqrt{x} + 2] =$$

$$= 0$$

**8.8.**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

**8.9.**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{(x-3)(x-2)}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x-3}\sqrt{x-2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x-2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3-2}} =$$

$$= 1$$

**Cálculo auxiliar**

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

**8.10.**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - x}{x^3 - x^2} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x} - x)(\sqrt{x} + x)}{(x^3 - x^2)(\sqrt{x} + x)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x^2}{(x^3 - x^2)(\sqrt{x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1-x)}{x^2(x-1)(\sqrt{x} + x)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x(\sqrt{x+1})} = \\
&= \frac{-1}{0^+} = \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}} &= \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x)(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x)(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1})}{x+1 - x^2 - 1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1})}{x(1-x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1})}{1-x} = \\
&= \frac{1 \times (1+1)}{1} = \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8.12. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2-1}} &= \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1})}{x-1 - x^2 + 1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1})}{x(1-x)} = \\
&= - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1}}{x} = \\
&= - \frac{0+0}{1} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

9. Como  $1 \in D_f$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  existe se e só se

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1).$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x} = 3$$

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{x-1}{x-2} + k \right) = \\
&= 0 + k = \\
&= k
\end{aligned}$$

Assim,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  existe se e só se  $k = 3$ .

10.

$$\begin{aligned}
10.1. \bullet \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\bullet g(0) = 0$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq g(0)$ , então  $g$  não é contínua em  $x = 0$ .

$$10.2. \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} i(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} i(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{0+1}}{\sqrt{0-3}} = -\frac{1}{3}$$

$$\bullet i(0) = -\frac{1}{3}$$

Uma vez que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} i(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} i(x) = i(0) = -\frac{1}{3}$ , conclui-se que  $i$  é contínua em  $x = 0$ .

11.

$$11.1. \bullet g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{kx} = \frac{2}{k}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2-x) = 1$$

Para que a função  $g$  seja contínua em  $\mathbb{R}$ :

$$g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \Leftrightarrow \frac{2}{k} = 1 \Leftrightarrow k = 2$$

Logo,  $k = 2$ .

$$11.2. \bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} i(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{kx+1}{x} = \frac{-k+1}{-1} = k-1 = i(-1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} i(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-k) = -1-k$$

Para que a função  $i$  seja contínua em  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
i(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} i(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} i(x) \Leftrightarrow k-1 = -1-k \\
&\Leftrightarrow 2k = 0 \\
&\Leftrightarrow k = 0
\end{aligned}$$

Logo,  $k = 0$ .

## 12.

**12.1.** No intervalo  $]-\infty, 0[$  a função é contínua, pois é o quociente entre duas funções contínuas: uma, que é uma função afim, e outra, que é a diferença entre uma função constante e a raiz quadrada de uma função afim.

No intervalo  $]0, +\infty[$  a função é contínua, pois é uma função racional.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2 - \sqrt{4-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(2 + \sqrt{4-x})}{(2 - \sqrt{4-x})(2 + \sqrt{4-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(2 + \sqrt{4-x})}{4 - 4 + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(2 + \sqrt{4-x})}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + \sqrt{4-x}) = \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 4) = 4$$

$$\bullet f(0) = 4$$

Uma vez que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 4$ , conclui-se que  $f$  é contínua em  $x = 0$ .

Logo,  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .

**12.2.** No intervalo  $]-\infty, 1[$  a função é contínua, pois é o quociente entre duas funções contínuas: uma, que é uma função afim, e outra, que é a diferença entre uma função afim e a raiz quadrada de uma função afim.

No intervalo  $]1, +\infty[$  a função é contínua, pois é o quociente entre duas funções contínuas: uma, que é uma função afim, e outra, que é a raiz quadrada de uma função afim.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{x^2-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{x(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Uma vez que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ , conclui-se que não existe  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  e, então,  $g$  não é contínua em  $x = 1$ .

Logo,  $g$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

## 13.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3 = f(1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ , então  $f$  não é contínua em  $x = 1$ .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{x-1}{x-2} \right) = 0 = g(1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ , então  $g$  não é contínua em  $x = 1$ .

$$\mathbf{13.2} \quad (f+g)(x) = \begin{cases} 2x+1 + \frac{x-1}{x-2} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + x+1 & \text{se } x > 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2x^2-2x-3}{x-2} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{x^2+x+1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} (f+g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2-2x-3}{x-2} = \\ &= \frac{2-2-3}{1-2} = \\ &= 3 = (f+g)(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} (f+g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x+1}{x} = \\ &= \frac{1+1+1}{1} = \\ &= 3 \end{aligned}$$

Como  $(f+g)(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (f+g)(x)$ , então  $f+g$  é contínua em  $x = 1$ .

14.

$$14.1. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$14.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$14.3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$14.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$14.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2-1}{1-0} = 1$$

$$14.6. \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1) = 1$$

15.

$$15.1. f(x) = \frac{x^2 + 2}{3x + 2}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: 3x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

**Assíntotas verticais**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}^+} \frac{x^2 + 2}{3x + 2} = \frac{\frac{4}{9} + 2}{0^+} = +\infty$$

Logo, a reta de equação  $x = -\frac{2}{3}$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

Não há outras assíntotas verticais, uma vez que  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ , por se tratar de uma função irracional com este domínio.

**Assíntotas não verticais**

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + 2}{3x + 2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{2}{x}} = \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 2}{3x + 2} - \frac{1}{3}x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 - 2x}{9x + 6} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{6}{x} - 2}{9 + \frac{6}{x}} = \\ &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 + 2}{3x + 2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{2}{x}} = \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 + 2}{3x + 2} - \frac{1}{3}x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6 - 2x}{9x + 6} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{6}{x} - 2}{9 + \frac{6}{x}} = \\ &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$ .

$$15.2. f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 9 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

**Assíntotas verticais**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \frac{30}{0^-} = -\infty$$

Logo, a reta de equação  $x = -3$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-2}{x+3} = \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $x = 3$  não é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

Não há outras assíntotas verticais, uma vez que  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ , por se tratar de uma função irracional com este domínio.

## Assíntotas horizontais

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $y = 1$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

**15.3.**  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2}$

$$D = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + 3x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

### Cálculo auxiliar

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

## Assíntotas verticais

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{-7}{0^-} = +\infty$$

Logo, a reta de equação  $x = -2$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x + 1}{x+2} = \\ &= 3 \end{aligned}$$

### Cálculo auxiliar

	1	0	0	1
-1		-1	1	-1
	1	-1	1	0

Logo, a reta de equação  $x = -1$  não é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

Não há outras assíntotas verticais, uma vez que  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ , por se tratar de uma função irracional com este domínio.

## Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - x + 1}{x + 2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 3x}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 3}{1 + \frac{2}{x}} = \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 - x + 1}{x + 2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 3x}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - 3}{1 + \frac{2}{x}} = \\ &= -3 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $y = x - 3$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$ .



15.4.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0 \wedge \sqrt{x}-3 \neq 0\} = [0, 9[ \cup ]9, +\infty[$$

#### Assíntotas verticais

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{1}{\sqrt{x}-3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Logo, a reta de equação  $x = 9$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

Não há outras assíntotas verticais, uma vez que  $f$  é contínua em  $[0, 9[ \cup ]9, +\infty[$ , por se tratar do quociente de duas funções contínuas.

#### Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(\sqrt{x}-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(\sqrt{x}-3)} = \\ &= \frac{1}{+\infty} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-3} = \\ &= \frac{1}{+\infty} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $y = 0$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

15.5.  $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-x}$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x^2-x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

#### Assíntotas verticais

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x-1|}{x^2-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x+1}{x^2-x} = \\ &= \frac{1}{0^-} = \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $x = 0$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x^2-x} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $x = 1$  não é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

Não há outras assíntotas verticais, uma vez que  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ , por se tratar do quociente de duas funções contínuas.

#### Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1|}{x^2-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1|}{x^3-x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \\ &= \frac{1}{+\infty} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1|}{x^2-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1|}{x^2-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1|}{x^3-x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{x^2(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2} = \\ &= \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1|}{x^2-x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{x(x-1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{-\infty} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $y = 0$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

**15.6.**  $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x-2 \geq 0 \wedge x^2-4 \neq 0\} = ]2, +\infty[$$

#### Assíntotas verticais

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)\sqrt{x-2}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x+2)\sqrt{x-2}} = \\
&= \frac{1}{0^+} = \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $x = 2$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

Não há outras assíntotas verticais, uma vez que  $f$  é contínua em  $]2, +\infty[$  por se tratar do quociente entre duas funções contínuas.

#### Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}
\bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x(x^2-4)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x(x-2)(x+2)\sqrt{x-2}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(x+2)\sqrt{x-2}} = \\
&= \frac{1}{+\infty} = \\
&= 0 \\
\bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)\sqrt{x-2}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+2)\sqrt{x-2}} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $y = 0$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

#### 16.

**16.1. a)** Por exemplo  $[0, 2]$ , uma vez que  $f(2) - f(0) = 2 - 0 = 2$ .

**b)** Por exemplo  $[3, 4]$ , uma vez que

$$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{0 - 2}{1} = -2.$$

**c)** Por exemplo  $[-2, 2]$ , uma vez que

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{2 - 2}{4} = 0.$$

**d)** Por exemplo  $[0, 2]$ , uma vez que

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1.$$

**16.2. a)**  $f(6) - f(-2) = 3 - 2 = 1$

**b)** t.m.v. $_{[2, 4]} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{0 - 2}{2} = -1$

t.m.v. $_{[0, 6]} = \frac{f(6) - f(0)}{6 - 0} = \frac{3 - 0}{6} = \frac{1}{2}$

#### 17.

**17.1.** Como  $f'(1) = 2$ , então uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa 1 é da forma  $y = 2x + b$ .

O ponto de coordenadas  $(1, 1)$  pertence a esta reta, logo:

$$1 = 2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -1$$

Assim, a equação pedida é  $y = 2x - 1$ .

**17.2.** O declive da reta  $t$  é 3. Logo, o declive de uma reta perpendicular a  $t$  é  $-\frac{1}{3}$ .

Assim, a equação pedida é da forma  $y = -\frac{1}{3}x + b$ .

O ponto de interseção do gráfico de  $t$  com o gráfico de  $f$  é o ponto de tangência cuja abscissa é 2.

A ordenada deste ponto é  $y = 3 \times 2 - 1 = 5$ .

Assim, o ponto de coordenadas  $(2, 5)$  pertence à reta pretendida, logo:

$$5 = -\frac{1}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 5 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = \frac{17}{3}$$

A equação pedida é  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$ .

**17.3. a)**  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 2$

**b)**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x)]^2 - [f(1)]^2}{x - 1} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + f(1)] =$   
 $= f'(1) \times 2f(1) = 2 \times 2 \times 1 = 4$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 3$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{f(x) - f(2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{f(x) - f(2)} \times \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = \\ &= \frac{1}{f'(2)} \times (2 + 2) = \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{\sqrt{2-x} + \sqrt{3}} = \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{3}} = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned} 18.1. f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 0}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18.2. f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 1 - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - 2x + 3)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x + 3) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18.3. f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x+1}{x-3} - (-3)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x+1+3(x-3)}{x-3}}{x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{4x-8}{x-3}}{x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{x-3} = \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18.4. f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{3}}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - x - 3}{(x + 1)(\sqrt{2-x} + \sqrt{3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x - 1}{(x + 1)(\sqrt{2-x} + \sqrt{3})} = \end{aligned}$$

19.

$$19.1. f'(x) = (x^2 + 2x - 3)' = 2x + 2$$

$$\begin{aligned} 19.2. f'(x) &= \left[ \frac{1}{2} (x^4 - 2x^3 + 6x) \right]' = \\ &= \frac{1}{2} (4x^3 - 6x^2 + 6) = \\ &= 2x^3 - 3x^2 + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19.3. f'(x) &= \left( \frac{x^3 - 3x + 9}{3} \right)' = \\ &= \frac{1}{3} (3x^2 - 3) = \\ &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19.4. f'(x) &= [(x^2 + 3x)^2]' = \\ &= 2(x^2 + 3x)(x^2 + 3x)' = \\ &= 2(x^2 + 3x)(2x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19.5. f'(x) &= [(-2x^3 + x + 1)^4]' = \\ &= 4(-2x^3 + x + 1)^3(-2x^3 + x + 1)' = \\ &= 4(-2x^3 + x + 1)^3(-6x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19.6. f'(x) &= [(x^2 + 2x)(x^4 - x^3 + 2)]' = \\ &= (x^2 + 2x)'(x^4 - x^3 + 2) + (x^2 + 2x)(x^4 - x^3 + 2)' = \\ &= (2x + 2)(x^4 - x^3 + 2) + (x^2 + 2x)(4x^3 - 3x^2) = \\ &= 2x^5 - 2x^3 + 4x + 4 + 4x^5 + 5x^4 - 6x^3 = \\ &= 6x^5 + 5x^4 - 8x^3 + 4x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19.7. f'(x) &= [(x + 3)^3(2x - 5)]' = \\ &= [(x + 3)^3]'(2x - 5) + (x + 3)^3(2x - 5)' = \\ &= 3(x + 3)^2(2x - 5) + (x + 3)^3 \times 2 = \\ &= (x + 3)^2[3(2x - 5) + 2(x + 3)] = \\ &= (x + 3)^2(6x - 15 + 2x + 6) = \\ &= (x + 3)^2(8x - 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19.8. f'(x) &= [(x^2 - 5x + 6)^2(x - 3)^3]' = \\ &= [(x^2 - 5x + 6)^2]'(x - 3)^3 + \\ &\quad + (x^2 - 5x + 6)^2[x - 3]^3' = \\ &= 2(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x + 6)'(x - 3)^3 + \\ &\quad + (x^2 - 5x + 6)^2 3(x - 3)^2 = \\ &= 2(x^2 - 5x + 6)(2x - 5)(x - 3)^3 + \\ &\quad + (x^2 - 5x + 6)^2 3(x - 3)^2 = \\ &= (x^2 - 5x + 6)(x - 3)^2 [2(x - 3)(2x - 5) + \\ &\quad + 3(x^2 - 5x + 6)] = \\ &= (x^2 - 5x + 6)(x - 3)^2 (4x^2 - 22x + 30 + \\ &\quad + 3x^2 - 15x + 18) = \\ &= (x^2 - 5x + 6)(x - 3)^2 (7x^2 - 37x + 48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.9. f'(x) &= \left( \frac{x-1}{x+3} \right)' = \\
 &= \frac{(x-1)'(x+3) - (x-1)(x+3)'}{(x+3)^2} = \\
 &= \frac{x+3-x+1}{(x+3)^2} = \\
 &= \frac{4}{(x+3)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.10. f'(x) &= \left[ \frac{x^2-3x+4}{(x-1)^2} \right]' = \\
 &= \frac{(x^2-3x+4)'(x-1)^2 - (x^2-3x+4)[(x-1)^2]'}{[(x-1)^2]^2} = \\
 &= \frac{(2x-3)(x-1)^2 - (x^2-3x+4)2(x-1)}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{(x-1)[(2x-3)(x-1) - 2(x^2-3x+4)]}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{2x^2-5x+3-2x^2+5x-8}{(x-1)^3} = \\
 &= \frac{x-5}{(x-1)^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.11. f'(x) &= \left[ \frac{(x+1)^3}{x^3-1} \right]' = \\
 &= \frac{[(x+1)^3]'(x^3-1) - (x+1)^3(x^3-1)'}{(x^3-1)^2} = \\
 &= \frac{3(x+1)^2(x^3-1) - (x+1)^3 3x^2}{(x^3-1)^2} = \\
 &= \frac{3(x+1)^2[x^3-1 - (x+1)x^2]}{(x^3-1)^2} = \\
 &= \frac{3(x+1)^2(x^3-1-x^3-x^2)}{(x^3-1)^2} = \\
 &= \frac{3(x+1)^2(-1-x^2)}{(x^3-1)^2} = \\
 &= \frac{-3(x+1)^2(x^2+1)}{(x^3-1)^2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.12. f'(x) &= \left[ \left( \frac{x+2}{2x-1} \right)^2 \right]' = \\
 &= 2 \left( \frac{x+2}{2x-1} \right) \left( \frac{x+2}{2x-1} \right)' = \\
 &= 2 \left( \frac{x+2}{2x-1} \right) \frac{(x+2)'(2x-1) - (x+2)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \\
 &= 2 \left( \frac{x+2}{2x-1} \right) \frac{2x-1-2(x+2)}{(2x-1)^2} = \\
 &= \frac{2(x+2)(2x-1-2x-4)}{(2x-1)^3} = \\
 &= \frac{-10(x+2)}{(2x-1)^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.13. f'(x) &= (\sqrt{x+1})' = \\
 &= \left[ (x+1)^{\frac{1}{2}} \right]' = \\
 &= \frac{1}{2} (x+1)^{-\frac{1}{2}} = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.14. f'(x) &= [2\sqrt{(x+2)^2-1}]' = \\
 &= 2 \left[ ((x+2)^2-1)^{\frac{1}{2}} \right]' = \\
 &= 2 \times \frac{1}{2} ((x+2)^2-1)^{-\frac{1}{2}} ((x+2)^2-1)' = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-1}} \times 2(x+2) = \\
 &= \frac{2(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.15. f'(x) &= \left( \sqrt{\frac{3x+2}{2x-3}} \right)' = \\
 &= \left[ \left( \frac{3x+2}{2x-3} \right)^{\frac{1}{2}} \right]' = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{3x+2}{2x-3} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{3x+2}{2x-3} \right)' = \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}} \frac{(3x+2)'(2x-3) - (3x+2)(2x-3)'}{(2x-3)^2} = \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}} \frac{3(2x-3) - 2(3x+2)}{(2x-3)^2} = \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}} \frac{6x-9-6x-4}{(2x-3)^2} = \\
 &= \frac{-13}{2(2x-3)^2} \sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19.16. f'(x) &= \left( \frac{\sqrt{x+4}}{2x+5} \right)' = \\
 &= \frac{\left[ (x+4)^{\frac{1}{2}} \right]' (2x+5) - \sqrt{x+4} (2x+5)'}{(2x+5)^2} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2}(x+4)^{-\frac{1}{2}} (2x+5) - 2\sqrt{x+4}}{(2x+5)^2} = \\
 &= \frac{\frac{2x+5}{2\sqrt{x+4}} - 2\sqrt{x+4}}{(2x+5)^2} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2x+5-4(x+4)}{2\sqrt{x+4}(2x+5)^2} =$$

$$= \frac{-2x-11}{2\sqrt{x+4}(2x+5)^2}$$

$$19.17. f'(x) = \left( \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{2x}} \right)' =$$

$$= \left( x^{\frac{1}{3}} \right)' + \left( (2x)^{-\frac{1}{2}} \right)' =$$

$$= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} (2x)^{-\frac{3}{2}} \times 2 =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2x)^3}} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{2x^3}}$$

$$19.18. f'(x) = (\sqrt{x+1} (2x-1)^2)' =$$

$$= \left( (x+1)^{\frac{1}{2}} \right)' (2x-1)^2 + \sqrt{x+1} ((2x-1)^2)' =$$

$$= \frac{1}{2} (x+1)^{-\frac{1}{2}} (2x-1)^2 + \sqrt{x+1} \times 2(2x-1) \times$$

$$\times 2 =$$

$$= \frac{(2x-1)^2}{2\sqrt{x+1}} + 4(2x-1) \sqrt{x+1} =$$

$$= \frac{(2x-1)^2 + 8(2x+1)(x+1)}{2\sqrt{x+1}} =$$

$$= \frac{(2x-1)[(2x-1) + 8(x+1)]}{2\sqrt{x+1}} =$$

$$= \frac{(2x-1)(10x+7)}{2\sqrt{x+1}}$$

20.

$$20.1. a) (f \circ g)(1) = (f(g(1))) = f(4) = 24$$

$$b) (g \circ f)(1) = (g(f(1))) = g(3) = 10$$

$$c) (f \circ g)'(1) = (f'(g(1))) \times g'(1) =$$

$$= f'(4) \times g'(1) =$$

$$= 10 \times 3 =$$

$$= 30$$

#### Cálculos auxiliares

$$f'(x) = (x^2 + 2x)' = 2x + 2$$

$$g'(x) = (3x + 1)' = 3$$

$$d) (g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \times f'(1) =$$

$$= g'(3) \times f'(1) =$$

$$= 3 \times 4 =$$

$$= 12$$

$$20.2. a) (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) =$$

$$= f'(3x+1) \times g'(x) =$$

$$= [2(3x+1) + 2] \times 3 =$$

$$= 18x + 12$$

$$b) (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) =$$

$$= g'(x^2 + 2x) \times f'(x) =$$

$$= 3 \times (2x + 2) =$$

$$= 6x + 6$$

21.

$$21.1. \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) = 1$$

$$g(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$ , então  $g$  é contínua em  $x = 1$ .

$$21.2. g'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{x(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x} =$$

$$= -1$$

$$g'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{x^2 + 1} - 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x^2 + 1) - 2 - 2(x^2 + 1)}{2(x^2 + 1)(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{2(x^2 + 1)(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x^2 + 1)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{2(x^2 + 1)} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

Como  $g'(1^-) \neq g'(1^+)$ , então não existe  $g'(1)$ , ou seja,  $g$  não é diferenciável em  $x = 1$ .

$$21.3. g'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{se } x < 1 \\ \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\left( \frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left( \frac{3}{2} - \frac{1}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

22.

22.1.  $f(x) = -x^2 + 3x + 1$

$$f(1) = -1 + 3 + 1 = 3$$

$$f'(x) = (-x^2 + 3x + 1)' = -2x + 3$$

$$f'(1) = -2 + 3 = 1$$

Assim, a equação pedida é da forma  $y = x + b$ .

Como (1, 3) é o ponto de tangência:

$$3 = 1 + b \Leftrightarrow b = 2$$

Logo, a equação pedida é  $y = x + 2$ .

22.2.  $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$

$$f(1) = \frac{4}{1} = 4$$

$$f'(x) = \left(\frac{x+3}{2x-1}\right)' = \frac{2x-1-(x+3) \times 2}{(2x-1)^2} = \frac{-7}{(2x-1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{-7}{1} = -7$$

Assim, a equação pedida é da forma  $y = -7x + b$ .

Como (1, 4) é o ponto de tangência:

$$4 = -7 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 11$$

Logo, a equação pedida é  $y = -7x + 11$ .

22.3.  $f(x) = (2x^3 - 3x)^2$

$$f(1) = (2 - 3)^2 = 1$$

$$f'(x) = ((2x^3 - 3x)^2)' = 2(2x^3 - 3x)(6x^2 - 3)$$

$$f'(1) = 2 \times (-1) \times 3 = -6$$

Assim, a equação pedida é da forma  $y = -6x + b$ .

Como (1, 1) é o ponto de tangência:

$$1 = -6 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 7$$

Logo, a equação pedida é  $y = -6x + 7$ .

22.4.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$

$$f(1) = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 3x})' = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}$$

$$f'(1) = \frac{5}{2\sqrt{1+3}} = \frac{5}{4}$$

Assim, a equação pedida é da forma  $y = \frac{5}{4}x + b$ .

Como (1, 2) é o ponto de tangência:

$$2 = \frac{5}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{4}$$

Logo, a equação pedida é  $y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$ .

23.  $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x-1}\right)' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

23.1. a)  $f(-1) = \frac{-2}{-2} = 1$

$$f'(-1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Assim, a equação pedida é da forma  $y = -\frac{1}{2}x + b$ .

Como (-1, 1) é o ponto de tangência:

$$1 = -\frac{1}{2} \times (-1) + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

Logo, a equação pedida é  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

b)  $f(0) = 0$

$$f'(0) = -2$$

Assim, a equação pedida é da forma  $y = -2x + b$ .

Como (0, 0) é o ponto de tangência:

$$0 = -2 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 0$$

Logo, a equação pedida é  $y = -2x$ .

23.2. a)  $f(-2) = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

$$f'(-2) = \frac{-2}{9}$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa -2 é da forma

$$y = -\frac{2}{9}x + b.$$

Como  $\left(-2, \frac{4}{3}\right)$  é o ponto de tangência:

$$\frac{4}{3} = -\frac{2}{9} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = \frac{8}{9}$$

Logo, a equação referida é  $y = -\frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$ .

$$4x + 9y = 1 \Leftrightarrow 9y = -4x + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{9}x + \frac{1}{9}$$

Assim, a abscissa do ponto de interseção das duas retas é dada por:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{9}x + \frac{8}{9} &= -\frac{4}{9}x + \frac{1}{9} \Leftrightarrow -2x + 8 = -4x + 1 \\ &\Leftrightarrow 2x = -7 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

A ordenada do ponto de interseção das duas retas é:

$$y = -\frac{2}{9} \times \left(-\frac{7}{2}\right) + \frac{8}{9} = \frac{15}{9}$$

Logo, as coordenadas do ponto de interseção da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa -2 com a reta de equação

$$4x + 9y = 1 \text{ são } \left(-\frac{7}{2}, \frac{15}{9}\right).$$

b) O declive da reta tangente ao gráfico de  $f$  a que se refere o enunciado é  $m = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \Leftrightarrow \frac{-2}{(x-1)^2} = -1 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \sqrt{2} \vee x-1 = -\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2} \vee x = 1 - \sqrt{2}$$

$$f(1 + \sqrt{2}) = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

$$f(1 - \sqrt{2}) = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{-\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

Assim, as coordenadas dos pontos de tangência das retas tangentes ao gráfico de  $f$  com inclinação  $135^\circ$  são  $(1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$  e  $(1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$ .

$$23.3. f'(3) = \frac{-2}{(3-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

Então, a inclinação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 3 é  $\text{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 153,4^\circ$ .

24.

$$24.1. d(0) = -4,9 \times 0 + 19,6 \times 0 + 7,8 = 7,8$$

No instante em que foi lançado, o homem-bala estava a uma altura de 7,8 metros.

$$24.2. d(t) = 1,5 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 19,6t + 7,8 = 1,5$$

$$\Leftrightarrow -4,9t^2 + 19,6t + 6,3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-19,6 \pm \sqrt{19,6^2 - 4 \times (-4,9) \times 6,3}}{2 \times (-4,9)}$$

Então,  $t \approx -0,3$  ou  $t \approx 4,3$ .

O homem-bala esteve no ar, aproximadamente, 4,3 segundos.

$$24.3. d'(t) = -9,8t + 19,6$$

$$d'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 19,6 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

$t$	0		2		4,3
Sinal de $d'$		+	0	-	
Variação de $d$		$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	

$$d(2) = -4,9 \times 4 + 19,6 \times 2 + 7,8 = 27,4$$

A altura máxima atingida pelo homem-bala foi 27,4 metros.

24.4. A velocidade média nos primeiros dois segundos é dada por:

$$\frac{d(2) - d(0)}{2 - 0} = \frac{27,4 - 7,8}{2} = 9,8 \text{ m/s}$$

$$24.5. d'(t) = -9,8t + 19,6$$

$$d'(0,5) = -9,8 \times 0,5 + 19,6 = 14,7$$

No instante em que tinham decorridos 0,5 segundos desde o início do lançamento, a velocidade do homem-bala era 14,7 m/s.

$$24.6. d'(3) = -9,8 \times 3 + 19,6 = -9,8$$

A velocidade do homem-bala no instante  $t = 3$  era de -9,8 m/s.

25.

$$25.1. f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 6$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 6x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

$x$	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
Sinal de $f'$	-	0	+	0	-
Variação de $f$	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

$$f(-1) = 2 + 3 - 12 + 6 = -1$$

$$f(2) = -16 + 12 + 24 + 6 = 26$$

$f$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, -1]$  e em  $[2, +\infty[$  e é estritamente crescente em  $[-1, 2]$ ; tem um máximo relativo 26 em  $x = 2$  e tem um mínimo relativo -1 em  $x = -1$ .

$$25.2. f(x) = 2(x-1)(x-2)^2$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2[(x-2)^2 + (x-1)2(x-2)] =$$

$$= 2(x-2)(x-2+2x-2) =$$

$$= 2(x-2)(3x-4)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-2)(3x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 0 \vee 3x-4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{4}{3}$$

$x$	$-\infty$	$\frac{4}{3}$		2	$+\infty$
Sinal de $f'$	+	0	-	0	+
Variação de $f$	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{27}$$

$$f(2) = 2 \times 1 \times 0 = 0$$

$f$  é estritamente crescente em  $]-\infty, \frac{4}{3}]$  e em  $[2, +\infty[$

e é estritamente decrescente em  $\left[\frac{4}{3}, 2\right]$ ; tem um

máximo relativo  $\frac{8}{27}$  em  $x = \frac{4}{3}$  e tem um mínimo relativo 0 em  $x = 2$ .

$$25.3. f(x) = \frac{(x-1)^2}{1-2x}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(1-2x) - (x-1)^2(-2)}{(1-2x)^2} =$$

$$= \frac{2(x-1)(1-2x+x-1)}{(1-2x)^2} =$$

$$= \frac{-2x(x-1)}{(1-2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x(x-1)}{(1-2x)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

$x$	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
Sinal de $f'$	-	0	+	n.d.	+	0	-
Variação de $f$	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 0$$

$f$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, 0]$  e em  $[1, +\infty[$  e é estritamente crescente em  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  e em  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ; tem um mínimo relativo 1 em  $x = 0$  e tem um máximo relativo 0 em  $x = 1$ .

**25.4.**  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^3 - 1) - (x^2 - 1)3x^2}{(x^3 - 1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x-1)(x^2+x+1) - 3x^2(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{x(x-1)[2(x^2+x+1) - 3x(x+1)]}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{x(2x^2+2x+2-3x^2-3x)}{(x-1)(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{x(-x^2-x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{-x(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$$

#### Cálculos auxiliares

	1	0	0	-1
-1		1	1	1
	1	1	1	0

$$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}, \text{ que é uma equação}$$

impossível em  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Logo, } x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

$$-x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

$$\text{Logo, } -x^2 - x + 2 = -(x+2)(x-1).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

$x$	$-\infty$	-2		0		1	$+\infty$
Sinal de $f'$	-	0	+	0	-	n.d.	-
Variação de $f$	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$

$$f(-2) = \frac{4-1}{-8-1} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$$

$$f(0) = 1$$

$f$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, -2]$ , em  $[0, 1[$  e em  $]1, +\infty[$  e é estritamente crescente em  $[-2, 0]$ ; tem um mínimo relativo  $-\frac{1}{3}$  em  $x = -2$  e tem um máximo relativo 1 em  $x = 0$ .

**25.5.**  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

#### Cálculo auxiliar

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x^2+3x+2) - (x^2-4x+4)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 + 2x^2 - 8x - 8 - 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12}{(x^2+3x+2)^2} =$$

$$= \frac{7x^2 - 4x - 20}{(x^2+3x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{7x^2 - 4x - 20}{(x^2+3x+2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 - 4x - 20 = 0 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+560}}{14} \wedge x \neq -2 \wedge x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{10}{7}$$

$x$	$-\infty$	-2		$-\frac{10}{7}$		-1		2	$+\infty$
Sinal de $f'$	+	n.d.	+	0	-	n.d.	-	0	-
Variação de $f$	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

$$f\left(-\frac{10}{7}\right) = \frac{\left(-\frac{10}{7}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{10}{7}\right) + 4}{\left(-\frac{10}{7}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{10}{7}\right) + 2} = -48$$

$$f(2) = 0$$

$f$  é estritamente crescente em  $]-\infty, -2]$ , em  $\left]-2, -\frac{10}{7}\right]$  e em  $[2, +\infty[$  e é estritamente decrescente em  $\left[-\frac{10}{7}, -1\right]$  e em  $]-1, 2]$ ; tem um mínimo relativo 0 em  $x = 2$  e tem um máximo relativo -48 em  $x = -\frac{10}{7}$ .



**25.6.**  $f(x) = \sqrt{2x-1}$

$$D_f = \left[ \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$f'(x) > 0, \forall x \in \left[ \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

Logo,  $f$  é estritamente crescente em todo o seu domínio e tem um mínimo absoluto 0 em  $x = \frac{1}{2}$ .

**25.7.**  $f(x) = \left( \frac{x-2}{3-x} \right)^3$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$f'(x) = 3 \left( \frac{x-2}{3-x} \right)^2 \frac{3-x+x-2}{(3-x)^2} = \frac{3(x-2)^2}{(3-x)^2}$$

$$f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Logo,  $f$  é estritamente crescente em todo o seu domínio e não tem extremos relativos.

**25.8.**  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

$$D_f = [0, +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x+2})^2} = -\frac{1}{2(\sqrt{x+2})^2 \sqrt{x}}$$

$$f'(x) < 0, \forall x \in [0, +\infty[$$

Logo,  $f$  é estritamente decrescente em todo o seu domínio e tem um máximo absoluto  $\frac{1}{2}$  em  $x = 0$ .

**26.**

**26.1.** A função  $f$  é descontínua em  $x = 3$ .

**26.2.** A função  $f$  é contínua mas não é diferenciável em  $x = -2$  e em  $x = 6$ .

**26.3.**  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2[ \cup [0, 3[ \cup ]3, 5] \cup ]6, +\infty[$

**26.4.**  $f(x) \times f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -3[ \cup ]-2, 0[ \cup ]5, 6[$

$x$	$-\infty$	$-3$		$-2$		$0$		$3$		$5$		$6$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	n.d.	-	0	+	n.d.	+	0	-	n.d.	0
$f(x) \times f'(x)$	-	0	+	n.d.	-	0	+	n.d.	+	0	-	n.d.	0

**27.**

**27.1.**  $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{c}{b} \right\}$

Uma vez que o ponto de coordenadas  $\left(0, \frac{1}{3}\right)$  pertence ao gráfico de  $f$ , tem-se que:

$$f(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow c = 3$$

Como a reta de equação  $x = -3$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ , então:

$$-\frac{3}{b} = -3 \Leftrightarrow b = 1$$

Como a reta de equação  $y = 2$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ , então:

$$\frac{a}{1} = 2 \Leftrightarrow a = 2$$

**27.2.** O gráfico da função  $g$  pode ser obtido do gráfico de  $f$  através de uma translação segundo o vetor  $(-1, -2)$ . Assim, as assíntotas ao gráfico de  $g$  são as retas de equações  $x = -3 - 1 \Leftrightarrow x = -4$  e  $y = 2 - 2 \Leftrightarrow y = 0$ .

**27.3. a)**  $\lim a_n = \lim \frac{3n-2}{1-n} = \lim \left( -3 + \frac{1}{1-n} \right) = -3^-$

**Cálculo auxiliar**

$$\frac{3n-2}{-3n+3} \frac{-n+1}{-3} = \frac{1}{1}$$

Assim,  $\lim f(a_n) = \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$ .

**b)**  $\lim b_n = \lim \frac{n^2+2}{n-1} = \lim \frac{n + \frac{2}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = +\infty$

Assim,  $\lim f(b_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .

**27.4. a)** Como a função  $f$  é contínua em todo o seu domínio, então:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{3}$$

**b)** Uma vez que a reta de equação  $y = 2$  é uma assíntota ao gráfico de  $f$  quando  $x$  tende para  $-\infty$ , então:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

**28.** Como a reta de equação  $y = 2x + 3$  é uma assíntota ao gráfico de  $f$ , tem-se que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 3$$

Então:

$$\begin{aligned}
 \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{f(x)}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} = \\
 &= \frac{1}{2} \\
 \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( g(x) - \frac{1}{2}x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{f(x)} - \frac{1}{2}x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - xf(x)}{2f(x)} = \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2x - f(x))}{f(x)} = \\
 &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \\
 &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 3 = \\
 &= -\frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Logo, uma equação da assíntota não vertical ao gráfico de  $g$  é  $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ .

29.

29.1.  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

**Assíntotas verticais**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Logo, a reta de equação  $x = 1$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

Não há outras assíntotas verticais ao gráfico de  $f$ , uma vez que  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , por se tratar do quociente de duas funções contínuas em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**Assíntotas não verticais**

$$\begin{aligned}
 \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x-1}{(x-1)^2}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x^3-2x^2+x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x-1}{(x-1)^2}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x^3-2x^2+x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0
 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $y = 0$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

29.2.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 0 \wedge (x-1)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{2(x-1)^2 - (2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{2(x-1) - (2x-1)2}{(x-1)^3} = \\
 &= \frac{2x-2 - (4x-2)}{(x-1)^3} = \\
 &= \frac{2x-2-4x+2}{(x-1)^3} = \\
 &= \frac{-2x}{(x-1)^3}
 \end{aligned}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-2 \times \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^3} = 8$$

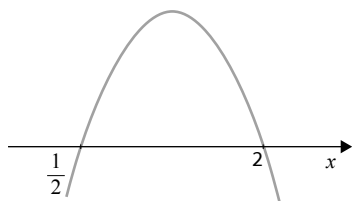
Então, a inclinação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de interseção deste com o eixo das abscissas é  $\text{tg}^{-1}(8) \approx 82,9^\circ$ .

$$\begin{aligned}
 29.3. \quad f(x) &\geq 2 + \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{(x-1)^2} \geq 2 + \frac{1}{x-1} \\
 &\Leftrightarrow \frac{2x-1}{(x-1)^2} - 2 - \frac{1}{x-1} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{2x-1-2(x-1)^2-(x-1)}{(x-1)^2} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{2x-1-2x^2+4x-2-x+1}{(x-1)^2} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{-2x^2+5x-2}{(x-1)^2} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{-2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-1)^2} \geq 0
 \end{aligned}$$

#### Cálculo auxiliar

$$-2x^2 + 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{1}{2}$$



$(x-1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , logo:

$$\frac{-2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-1)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[ \cup ]1, 2]$$

$$29.4. \text{ a) } A(x, f(x)) \quad B(x, 0) \quad C(1, 0) \quad D(1, 1)$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 A_{[ABCD]} &= \frac{(\overline{AB} + \overline{CD}) \times \overline{BC}}{2} = \\
 &= \frac{(f(x) + 1) \times (x-1)}{2} = \\
 &= \frac{\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2} + 1\right) \times (x-1)}{2} = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x-1}{x-1} + x-1\right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x-1+x^2-2x+1}{x-1}\right) = \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2}{2x-2} = g(x)
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

#### Assíntotas verticais

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{2x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação  $x = 1$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $g$ .

Não há outras assíntotas verticais ao gráfico de  $g$ , uma vez que  $g$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , por se tratar do quociente de duas funções contínuas em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

#### Assíntotas não verticais

$$\begin{aligned}
 \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{2x-2}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2-2x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \frac{1}{2}x\right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x\right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x^2+x}{2x-2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x-2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{2x-2}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x^2-2x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(g(x) - \frac{1}{2}x\right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x\right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-x^2+x}{2x-2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x-2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  é uma assíntota ao gráfico de  $g$ .

$$\begin{aligned}
\text{c) } g(x) = 2 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{2x-2} = 2 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2}{2x-2} - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 4}{2x-2} = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \wedge 2x-2 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \wedge x \neq 1 \\
&\Leftrightarrow x = 2
\end{aligned}$$

$$g(2) = \frac{2^2}{2 \times 2 - 2} = 2$$

Logo,  $A(2, 2)$ .

**30.**

**30.1.** Uma vez que existe derivada finita da função  $f$  em  $x = -1$  e, como toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto, então  $f$  é contínua em  $x = -1$ .

Assim,  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 2$ .

**30.2.** Uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa  $-1$  é da forma  $y = x + b$ .

O ponto de tangência tem coordenadas  $(-1, 2)$ , logo:  $2 = -1 + b \Leftrightarrow b = 3$

Assim, a equação pedida é  $y = x + 3$ .

**31.**

**31.1.**  $D_f = \mathbb{R}^+$

**Assíntotas verticais**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{x}(x+1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x\sqrt{x}}{x(x+1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = \frac{0}{1} = 0
\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $x = 0$  não é uma assíntota ao gráfico de  $f$ .

Não há outras assíntotas ao gráfico de  $f$ , uma vez que  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^+$ , por se tratar do quociente de duas funções contínuas em  $\mathbb{R}^+$ .

**Assíntotas não verticais**

$$\begin{aligned}
\bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{\sqrt{x}(x+1)}}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)} = 0 \\
\bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x}(x+1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \\
&= \frac{2}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação  $y = 0$  é uma assíntota ao gráfico de  $f$ .

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left( \frac{2x}{\sqrt{x}(x+1)} \right)' = \\
&= \frac{2\sqrt{x}(x+1) - 2x \left[ \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) + \sqrt{x} \right]}{[\sqrt{x}(x+1)]^2} = \\
&= \frac{2\sqrt{x}(x+1) - x \left( \frac{x+1+2x}{\sqrt{x}} \right)}{x(x+1)^2} = \\
&= \frac{2x(x+1) - x(3x+1)}{x\sqrt{x}(x+1)^2} = \\
&= \frac{2x+2-3x-1}{\sqrt{x}(x+1)^2} = \\
&= \frac{-x+1}{\sqrt{x}(x+1)^2}
\end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x+1}{\sqrt{x}(x+1)^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -x+1 = 0 \wedge \sqrt{x}(x+1)^2 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}$$

$x$	0		1	$+\infty$
<b>Sinal de <math>f'</math></b>	n.d.	+	0	-
<b>Variação de <math>f</math></b>	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

$$f(1) = \frac{2}{1 \times 2} = 1$$

A função  $f$  é estritamente crescente em  $]0, 1]$  e é estritamente decrescente em  $[1, +\infty[$  e tem um máximo 1 em  $x = 1$ .

$$\begin{aligned}
 31.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x))^2 - 1^2}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) - 1)(f(x) + 1)}{x - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + 1) = \\
 &= f'(1) \times (1 + 1) = \\
 &= 0 \times 2 = 0
 \end{aligned}$$

32.

$$32.1. \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1$$

$$\bullet f(0) = 1$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , então  $f$  é contínua em  $x = 0$ .

32.2. Uma vez que  $f$  é contínua em  $x = 0$ , então a reta de equação  $x = 0$  não é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ . Não há outras assíntotas verticais, já que  $f$  é contínua no restante domínio.

$$\bullet m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+1}} = 0$$

$$\bullet b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$$

$$\bullet m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{2}{x^2}} = 0$$

$$\bullet b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = 1$$

As retas de equações  $y = 0$  e  $y = 1$  são assíntotas ao gráfico de  $f$ .

32.3. Se  $x > 0$ , então:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left( \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)' = \\
 &= - \frac{1}{2\sqrt{x+1}^2} = \\
 &= - \frac{1}{2\sqrt{x+1}(x+1)}
 \end{aligned}$$

$$f'(1) = - \frac{1}{4\sqrt{2}} = - \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa  $x = 1$  é da forma  $y = - \frac{\sqrt{2}}{8} x + b$ .

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como o ponto de tangência tem coordenadas  $\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , vem que:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = - \frac{\sqrt{2}}{8} + b \Leftrightarrow b = \frac{5\sqrt{2}}{8}$$

Logo, a equação pedida é  $y = - \frac{\sqrt{2}}{8} x + \frac{5\sqrt{2}}{8}$ .

$$32.4. \bullet f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (x+1)}{x\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})} = - \frac{1}{2}$$

$$\bullet f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 - 2}{x(x^2 + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{x^2 + 2} = -1$$

Como  $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ , então a função  $f$  não é diferenciável em  $x = 0$ .

**32.5.** Se  $x > 0$ , então:

$$f'(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)' = - \frac{1}{2\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1})^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}(x+1)}$$

Assim,  $f'(x) < 0$ ,  $\forall x > 0$ , logo  $f$  é estritamente decrescente em  $[0, +\infty[$ .

Se  $x < 0$ , então:

$$f'(x) = \left( \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2} \right)' =$$

$$= \frac{(2x - 2)(x^2 + 2) - (x^2 - 2x + 2)2x}{(x^2 + 2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 4}{(x^2 + 2)^2}$$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$0$
Sinal de $f'$	+	0	-	
Variação de $f$	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	

$$f(-\sqrt{2}) = \frac{(-\sqrt{2})^2 - 2(-\sqrt{2}) + 2}{(-\sqrt{2})^2 + 2} =$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{2} + 2}{2 + 2} =$$

$$= \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

Assim,  $f$  é estritamente crescente em  $]-\infty, -\sqrt{2}]$  e é estritamente decrescente em  $]-\sqrt{2}, 0]$ . A função  $f$  tem um máximo  $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$  para  $x = -\sqrt{2}$ .

**33.**

**33.1.**  $f'(1) = \frac{1}{(1+1)^3} = \frac{1}{8}$

Uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa  $x = 1$  é da forma  $y = \frac{1}{8}x + b$ .

$$f(1) = 0$$

Como o ponto de tangência tem coordenadas  $(1, 0)$ , vem que:

$$0 = \frac{1}{8} + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{8}$$

Logo, a equação pedida é  $y = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}$ .

**33.2.**  $f'(1) = \frac{1}{(1+1)^3} = \frac{1}{8}$

Uma vez que existe derivada finita da função  $f$  em  $x = 1$  e, como toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto, então  $f$  é contínua em  $x = 1$ .

**33.3.**  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^3} = 0$ , que é uma equação impossível.

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
Sinal de $f'$	-	n.d.	+
Variação de $f$	$\searrow$	n.d.	$\nearrow$

A função  $f$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, -1[$  e é estritamente crescente em  $]-1, +\infty[$ . A função  $f$  não tem extremos relativos.

**34.** A afirmação (I) é falsa, uma vez que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = 0$ , ou seja, a reta de equação  $y = -x$  é uma assíntota ao gráfico da função  $f$  quando  $x$  tende para  $+\infty$ , e não pode haver simultaneamente duas assíntotas quando  $x$  tende para  $+\infty$ . Nada se pode concluir quanto ao valor lógico da afirmação (II). Apenas se sabe que  $\frac{f(4) - f(2)}{2} = 3$ ,

ou seja, a taxa média de variação da função  $f$  no intervalo  $[2, 4]$  é positiva, mas isso nada garante quanto à monotonia da função nesse intervalo. A afirmação (III) é verdadeira, já que  $f$  é uma função par e a reta de equação  $x = 1$  é uma assíntota ao gráfico da função  $f$ , logo a reta de equação  $x = -1$  também é uma assíntota ao gráfico de  $f$ .

## Tema V - Estatística

Páginas 62 a 65

**1.**

**1.1.**  $\bar{x} = \frac{2 + 4 + 6}{3} = 4$

$$\bar{y} = \frac{3 + 5 + 4}{3} = 4$$

**1.2.**  $b = \bar{y} - a\bar{x} = 4 - 4a$

Logo:

$$f(a) = \sum_{i=1}^3 (y_i - ax_i - b)^2 =$$

$$= (3 - 2a - 4 + 4a)^2 + (5 - 4a - 4 + 4a)^2 +$$

$$+ (4 - 6a - 4 + 4a)^2 =$$

$$= (-1 + 2a)^2 + 1^2 + (-2a)^2 =$$

$$= 1 - 4a + 4a^2 + 1 + 4a^2 =$$

$$= 8a^2 - 4a + 2$$

13.  $f'(a) = (8a^2 - 4a + 2)' = 16a - 4$

14.  $f'(a) = 0 \Leftrightarrow 16a - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

$a$	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
Sinal de $f'$	-	0	+
Varição de $f$	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

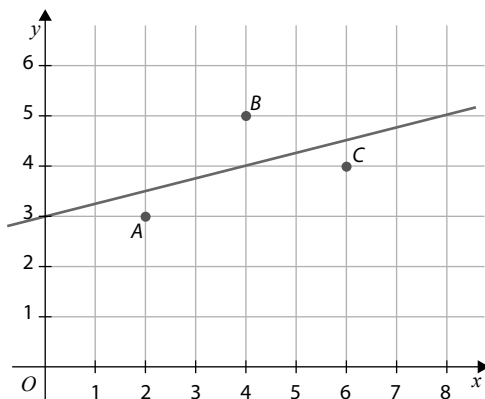
Logo,  $f$  tem um mínimo absoluto em  $m = \frac{1}{4}$ .

15. 
$$\frac{\sum_{i=1}^3 x_i y_i - 3\bar{x}\bar{y}}{SS_x} = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i y_i - 3\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^3 x_i^2 - 3\bar{x}^2} =$$

$$= \frac{2 \times 3 + 4 \times 5 + 6 \times 4 - 3 \times 4 \times 4}{2^2 + 4^2 + 6^2 - 3 \times 4^2} =$$

$$= \frac{6 + 20 + 24 - 48}{4 + 16 + 36 - 48} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = m$$

16.  $a = \frac{1}{4}$  e  $b = 4 - 4 \times \frac{1}{4} = 3$ , logo  $y = \frac{1}{4}x + 3$  é a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados desta sequência de pontos.



2.

2.1. Gráfico 1: Associação linear positiva forte.

Gráfico 2: Associação linear nula.

Gráfico 3: Associação linear negativa forte.

Gráfico 4: Associação linear positiva fraca.

2.2. Gráfico 1:  $r_2 = 1$

Gráfico 2:  $r_4 = 0,8$

Gráfico 3:  $r_1 = -1$

Gráfico 4:  $r_7 = 0$

Gráfico 5:  $r_3 = -0,8$

Gráfico 6:  $r_6 = 0,3$

Gráfico 7:  $r_5 = -0,3$

3.  $y = 3,2x + 1,3$

Substituindo  $x$  por  $\bar{x}$  e  $y$  por  $\bar{y}$ , obtém-se:

$4,1 = 3,2 \times 3,4 + 1,3 \Leftrightarrow 4,1 = 12,18$ , que é uma proposição falsa.

Logo, como o ponto de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  não pertence à reta de equação  $y = 3,2x + 1,3$ , esta não pode ser a reta dos mínimos quadrados que melhor se ajusta a esta amostra.

4.  $y = -1,2x + 4,2$

Então:

$$\bar{y} = -1,2\bar{x} + 4,2 \Leftrightarrow 3,6 = -1,2\bar{x} + 4,2$$

$$\Leftrightarrow 1,2\bar{x} = 0,6$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = 0,5$$

5.

5.1.  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{21}{5} = 4,2$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i}{5} = \frac{29}{5} = 5,8$$

5.2. 
$$a = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{SS_x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^5 (x_i)^2 - 5\bar{x}^2} =$$

$$= \frac{144 - 5 \times 4,2 \times 5,8}{115 - 5 \times 4,2^2} \approx 0,8284 \approx 0,83$$

5.3.  $b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 5,8 - 0,8284 \times 4,2 \approx 2,32$

Logo, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é  $y = 0,83x + 2,32$ .

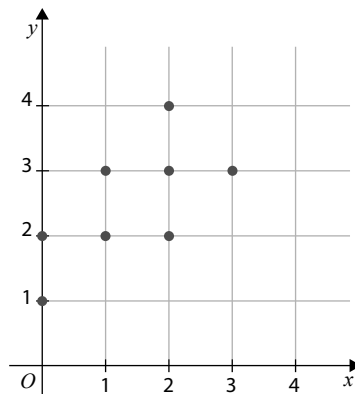
5.4. 
$$r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} \approx 0,8284 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (x_i)^2 - 5\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^5 (y_i)^2 - 5\bar{y}^2}} =$$

$$= 0,8284 \sqrt{\frac{115 - 5 \times 4,2^2}{195 - 5 \times 5,8^2}} \approx 0,83$$

6. Seja  $x$  a variável "número de filhos" e seja  $y$  a variável "número de quartos".

6.1.  $\bar{x} = 1,4$        $\bar{y} = 2,5$

6.2. A nuvem de pontos parece indicar uma associação linear positiva entre as variáveis.



6.3.  $y = 0,60x + 1,67$

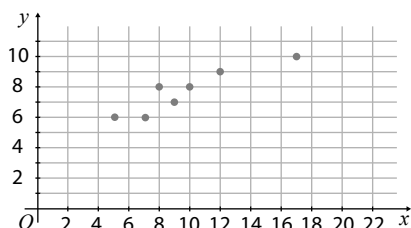
6.4.  $r \approx 0,68$

7. Seja  $x$  a variável "número de champôs" e seja  $y$  a variável "número de condicionadores".

7.1.  $\bar{x} = \frac{10 + 7 + 5 + 9 + 12 + 17 + 8}{7} \approx 9,71$

$\bar{y} = \frac{8 + 6 + 6 + 7 + 9 + 10 + 8}{7} \approx 7,71$

7.2. A nuvem de pontos parece indicar uma associação linear positiva entre as variáveis.



7.3.  $r = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \frac{32,429}{\sqrt{91,429 \times 13,429}} \approx 0,925 \approx 0,93$

$x_i$	$y_i$	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
10	8	0,29	0,286	0,286
7	6	-2,71	-2,714	-1,714
5	6	-4,71	-4,714	-1,714
9	7	-0,71	-0,714	-0,714
12	9	2,29	2,286	1,286
17	10	7,29	7,286	2,286
8	8	-1,71	-1,714	2,286
				$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 32,429$

$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
0,082	0,082
4,653	7,367
8,082	22,224
0,510	0,510
2,939	5,224
16,653	53,082
-0,490	2,939
$SS_x = 91,429$	$SS_y = 13,429$

7.4.  $r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} \Leftrightarrow a = r \sqrt{\frac{SS_y}{SS_x}}$

Logo,  $a \approx 0,925 \sqrt{\frac{13,429}{91,429}} \approx 0,3545 \approx 0,35$ .

$y = 0,35x + b$

$(\bar{x}, \bar{y}) = (9,714; 7,714)$  pertence à reta, logo:

$7,714 = 0,355 \times 9,714 + b \Leftrightarrow b = 4,26553$

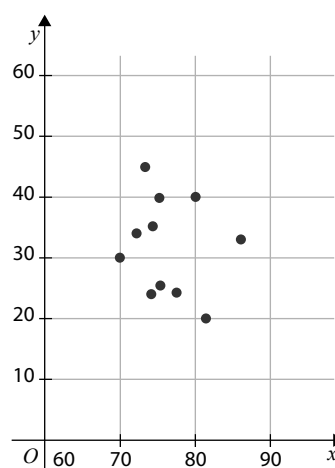
Assim, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é  $y = 0,35x + 4,27$ .

8.

8.1.  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} = \frac{916}{12} \approx 76,33 \text{ kg}$

$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{12} y_i}{12} = \frac{382}{12} \approx 31,83 \text{ km}$

8.2. A nuvem de pontos parece indicar que existe associação linear negativa fraca.



8.3.  $a = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i y_i - 12 \bar{x} \bar{y}}{SS_x} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i y_i - 12 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 (x_i)^2 - 12 \bar{x}^2} = \frac{29\,108 - 12 \times \frac{916}{12} \times \frac{382}{12}}{70\,142 - 12 \times \left(\frac{916}{12}\right)^2} \approx -0,2326 \approx -0,23$

$b = \bar{y} - a \bar{x} \approx 31,8333 - (-0,2326) \times 76,3333 \approx 49,59$

Logo, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é  $y = -0,23x + 49,59$ .

$r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} \approx -0,2326 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12} (x_i)^2 - 12 \bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{12} (y_i)^2 - 12 \bar{y}^2}} \approx -0,2326 \sqrt{\frac{70\,142 - 12 \times 76,333^2}{12\,796 - 12 \times 31,833^2}} \approx -0,14$

9.

9.1.  $\bar{x} \approx 79,04$

$\bar{y} \approx 83,84$

9.2.  $y = 0,61x + 35,25$

$r \approx 0,69$

9.3.  $y = 0,61 \times 77,6 + 35,25$

Logo,  $\approx 82,6$  anos.



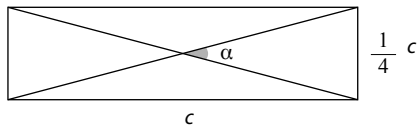
# Testes de Avaliação

## Teste n.º 1

Páginas 69 a 71

### Grupo I

1.



$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}c}{\frac{c}{2}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}c}{c}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Logo,  $\frac{\alpha}{2} \in ]0^\circ, 90^\circ[$  e  $\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ , ou seja,

$\frac{\alpha}{2} \approx 14,04^\circ$  e, portanto,  $\alpha \approx 28^\circ$ .

A opção correta é a (B).

2.  $A = (2 \cos 225^\circ, 2 \sin 225^\circ) =$

$$= \left(2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

A opção correta é a (D).

3.  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \sin x - \cos x \neq 0\}$

$$\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee \underbrace{x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}_{\text{Equação impossível}}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Logo, } D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$\text{Ora, } \frac{\pi}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[, \frac{5\pi}{4} \in \left]\pi, \frac{7\pi}{4}\right[ \text{ e } \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

A opção correta é a (D).

4.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \frac{x+2}{x^2-3} = 0$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \vee \frac{x+2}{x^2-3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee (x+2=0 \wedge x^2-3 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 2k, k \in \mathbb{Z} \vee x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

A opção correta é a (B).

5. Pela Lei dos Cossenos:

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos 120^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 136 - 120 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

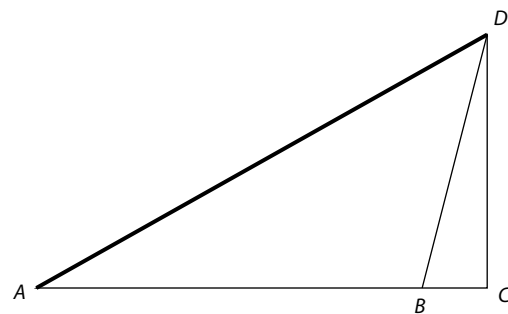
$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 196$$

Logo,  $\overline{AC} = 14$  cm.

A opção correta é a (B).

### Grupo II

1.



$$\widehat{DBA} = 180^\circ - 21^\circ = 159^\circ$$

$$\widehat{BDA} = 180^\circ - 159^\circ - 4^\circ = 17^\circ$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 4^\circ}{BD} = \frac{\sin 17^\circ}{20} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{20 \sin 4^\circ}{\sin 17^\circ}$$

Novamente pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 21^\circ}{CD} = \frac{\sin 90^\circ}{BD} \Leftrightarrow \overline{CD} = \sin 21^\circ \times \frac{20 \sin 4^\circ}{\sin 17^\circ}$$

Ou seja,  $\overline{CD} \approx 1,710$  km = 1710 m.

2.

2.1.  $T(6) = 6,9 \sin \frac{\pi(6-4,8)}{6} + 15,2 \approx 19,3^\circ\text{C}$

2.2.  $-1 \leq \sin \frac{\pi(n-4,8)}{6} \leq 1$

$$\Leftrightarrow -6,9 \leq 6,9 \sin \frac{\pi(n-4,8)}{6} \leq 6,9$$

$$\Leftrightarrow 8,3 \leq 6,9 \sin \frac{\pi(n-4,8)}{6} + 15,2 \leq 21,9$$

Assim, a temperatura média varia entre os  $8,3^\circ\text{C}$  e os  $21,9^\circ\text{C}$ .

2.3.  $T(n) > 18,65 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi(n-4,8)}{6} + 15,2 > 18,65$

$$\Leftrightarrow 6,9 \sin \frac{\pi(n-4,8)}{6} > 3,45$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{\pi(n-4,8)}{6} > \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sin \frac{\pi(n-4,8)}{6} > \sin \left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{\pi(n-4,8)}{6} > \frac{\pi}{6} \wedge \frac{\pi(n-4,8)}{6} < \frac{5\pi}{6} \\
&\Leftrightarrow n-4,8 > 1 \wedge n-4,8 < 5 \\
&\Leftrightarrow n > 5,8 \wedge n < 9,8
\end{aligned}$$

A temperatura média é superior a 18,65 °C nos meses de junho, julho, agosto e setembro.

3.

$$\begin{aligned}
3.1. f(x) &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + 3 \cos x + 2} = \\
&= \frac{1 - \cos^2 x}{(\cos x + 1)(\cos x + 2)} = \\
&= \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(2 + \cos x)} = \\
&= \frac{1 - \cos x}{2 + \cos x}
\end{aligned}$$

**Cálculo auxiliar**

$$\begin{aligned}
\cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0 &\Leftrightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \\
&\Leftrightarrow \cos x = -1 \vee \cos x = -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.2. f(x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1 - \cos x}{2 + \cos x} = 1 \\
&\Leftrightarrow 1 - \cos x = 2 + \cos x \\
&\Leftrightarrow 2 \cos x = -1 \\
&\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Como  $x \in ]-\pi, \pi[$ , então  $x = \frac{2\pi}{3}$  ou  $x = -\frac{2\pi}{3}$ .

$$3.3. f(-x) = \frac{1 - \cos(-x)}{2 + \cos(-x)} = \frac{1 - \cos x}{2 + \cos x} = f(x), \forall x \in ]-\pi, \pi[$$

Logo,  $f$  é uma função par.

$$\begin{aligned}
3.4. f\left(\arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= \frac{1 - \cos\left(\arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{2 + \cos\left(\arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right)} = \\
&= \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \\
&= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \\
&= \frac{2 - \sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 - \sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}} \times \frac{4 - \sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} = \\
&= \frac{8 - 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 3}{16 - 3} = \\
&= \frac{11 - 6\sqrt{3}}{13}
\end{aligned}$$

4.

$$4.1. A(\alpha) = A_{[AOB]} + A_{[OCA]}$$

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{OA} \times h}{2} = \frac{1 \times \sin \alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{2}$$

$$A_{[OCA]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AC}}{2} = \frac{1 \times (-\operatorname{tg} \alpha)}{2} = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$$

Como  $\alpha$  é um ângulo obtuso, então  $\operatorname{tg} \alpha < 0$ , pelo que  $\overline{AC} = -\operatorname{tg} \alpha$ .

$$\text{Logo, } A(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{2} + \left(-\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{2}.$$

$$4.2. \sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{4}$$

Da Fórmula Fundamental da Trigonometria, vem que:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{15}{16}$$

$$\text{Como } \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[, \text{ então } \cos \alpha = -\sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Assim:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
A(\alpha) &= \frac{\frac{1}{4} - \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}\right)}{2} = \\
&= \frac{15 + 4\sqrt{15}}{120}
\end{aligned}$$

## Teste n.º 2

Páginas 74 a 76

### Grupo I

1. Num intervalo de 35 minutos, a ponta do ponteiro dos minutos percorre  $\frac{7}{12}$  do total percorrido numa hora.

Ora, o total percorrido numa hora é  $2 \times \pi \times 12 = 24\pi$ .

Assim, em 35 minutos, a distância percorrida é

$$\frac{7}{12} \times 24\pi = 14\pi.$$

A opção correta é a (B).

2.  $\overline{AO} = \overline{OC} = 1$

$$\overline{OD} = \cos \alpha, \text{ logo } \overline{BD} = 1 + \cos \alpha.$$

$$\overline{AD} = \sin \alpha$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 = (1 + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 1 + 2 \cos \alpha + 1$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 2 + 2 \cos \alpha$$

$$\text{Logo, } \overline{AB} = \sqrt{2 + 2 \cos \alpha}.$$

$$\text{Assim, } P_{[ABCO]} = 2 + 2\sqrt{2 + 2 \cos \alpha}.$$

Tem-se então:

$$2 + 2\sqrt{2 + 2 \cos \alpha} = 2 + 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2 + 2 \cos \alpha} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2 \cos \alpha = 3$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{Como } \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \text{ então } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

A opção correta é a (A).

3. Seja  $m$  o declive da reta  $r$ .

$$m = \operatorname{tg} 150^\circ \Leftrightarrow m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Se  $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ , então são vetores diretores da reta  $r$ , por exemplo,  $(-3, \sqrt{3})$  ou  $(-\sqrt{3}, 1)$ .

Das equações apresentadas, apenas uma apresenta um destes vetores, não havendo qualquer equação com outro vetor diretor colinear com estes.

A opção correta é a (C).

4.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 0, a) \cdot (a, 0, -a) = 0 + 0 - a^2 = -a^2 < 0$ ,  
 $\forall a \in \mathbb{R}$ .

Logo, o ângulo formado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é obtuso.

A opção correta é a (D).

5.  $\vec{r}(m, 2, m)$  é um vetor diretor da reta  $r$ .

$\vec{a}(1, -1, 1)$  é um vetor ortogonal ao plano  $\alpha$ .

Para que a reta  $r$  seja perpendicular ao plano  $\alpha$  estes dois vetores têm que ser colineares.

$$\text{Assim, } \frac{m}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{m}{1}, \text{ pelo que } m = -2.$$

A opção correta é a (A).

### Grupo II

1.

- 1.1. Pela Lei dos Cossenos:

$$\overline{BD}^2 = 16^2 + 30^2 - 2 \times 16 \times 30 \times \cos 72^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 1156 + 960 \cos 72^\circ$$

$$\text{Logo, } \overline{BD} \approx 38 \text{ u.c.}$$

1.2.  $\sin 72^\circ = \frac{h}{16} \Leftrightarrow h = 16 \sin 72^\circ$

$$\text{Então, } A_{[ABCD]} = \frac{30 + 15}{2} \times 16 \sin 72^\circ \approx 342,4 \text{ u.a.}$$

2.

$$\begin{aligned} 2.1. f(x) &= \frac{1}{\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}} = \\ &= \frac{1}{\frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)}} = \\ &= \frac{\cos x (1 + \sin x)}{\sin x + 1} = \\ &= \cos x \end{aligned}$$

2.2.  $\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$

$$\Leftrightarrow -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow -\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

Assim:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\text{Como } \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \text{ e } \sin \alpha < 0, \text{ então } \cos \alpha > 0,$$

$$\text{logo } \cos \alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Ou seja, } f(\alpha) = \frac{4}{5}.$$

$$\begin{aligned}
2.3. f(x) = 1 + \sin^2 x &\Leftrightarrow \cos x = 1 + \sin^2 x \\
&\Leftrightarrow \cos x = 1 + 1 - \cos^2 x \\
&\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\
&\Leftrightarrow \underbrace{\cos x = -2}_{\text{Equação impossível}} \vee \cos x = 1 \\
&\Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Como  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , então  $x = 0$ .

3.

3.1.  $C$  é o ponto de interseção das retas  $AC$  e  $BC$ .

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4} \\ -2x + 3y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -2x + 3\left(-\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}\right) = -11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -2x - \frac{3}{4}x + \frac{33}{4} = -11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -8x - 3x + 33 = -44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -11x = -77 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{4} \times 7 + \frac{11}{4} \\ x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 7 \end{cases}$$

Logo,  $C(7, 1)$ .

$$3.2. BC:  $-2x + 3y = -11 \Leftrightarrow 3y = 2x - 11 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$$$

O declive da reta  $BC$  é  $\frac{2}{3}$ . Logo, o declive de uma reta perpendicular à reta  $BC$  é  $-\frac{3}{2}$  e um vetor diretor de uma reta perpendicular à reta  $BC$  é, por exemplo,  $(-2, 3)$ .

Assim,  $r: (x, y) = (-1, 3) + k(-2, 3), k \in \mathbb{R}$ .

3.3. Uma vez que o declive da reta  $AC$  é  $-\frac{1}{4}$ , um vetor diretor desta reta é, por exemplo,  $\vec{u}(-4, 1)$ .

Uma vez que o declive da reta  $BC$  é  $\frac{2}{3}$ , um vetor diretor desta reta é, por exemplo,  $\vec{v}(3, 2)$ .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-4, 1) \cdot (3, 2) = -12 + 2 = -10$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Então, sendo  $\alpha$  a amplitude do ângulo das retas  $AC$  e  $BC$ , tem-se:

$$\cos \alpha = \frac{|-10|}{\sqrt{17} \times \sqrt{13}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{10}{\sqrt{221}}$$

$$\text{Logo, } \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{221}}\right) \approx 47,7^\circ.$$

3.4. Como  $A(-1, 3)$  e  $B$  é o simétrico de  $A$  relativamente à origem do referencial, então  $B(1, -3)$ .

Assim, o declive da reta  $AB$  é dado por:

$$\frac{3 - (-3)}{-1 - 1} = -3$$

Sendo  $\alpha$  a inclinação da reta  $AB$ ,  $\alpha \in ]0^\circ, 180^\circ[ \wedge \text{tg } \alpha = -3$ , logo  $\alpha \approx 108,4^\circ$ .

3.5. O lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  do plano tais que  $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$  é a circunferência de diâmetro  $[AB]$ .

$$\begin{aligned}
\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0 &\Leftrightarrow (x+1, y-3) \cdot (x-1, y+3) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 1 + y^2 - 9 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10
\end{aligned}$$

4.

4.1. Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(2, 3, 1)$  e um vetor diretor da reta  $s$  é  $\vec{s}(2, 1, -1)$ .

Como  $\frac{2}{2} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{1}{-1}$ , os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  não são colineares. Logo, as retas  $r$  e  $s$  não são paralelas.

Como, além disso, o ponto de coordenadas  $(1, -1, 2)$  pertence a ambas as retas, então as retas  $r$  e  $s$  são concorrentes e, por isso, definem um plano.

4.2. Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo normal ao plano definido pelas retas  $r$  e  $s$ .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 3, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 1, -1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + c = 0 \\ 2a + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 2a + b = 0 \\ c = 2a + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = -4b \\ c = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = -2b + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = -b \end{cases}$$

Logo,  $\vec{u}(-b, b, -b), b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Por exemplo,  $\vec{u}(1, -1, 1)$ .

Os vetores diretores do plano  $\pi$  são  $(0, 1, 1)$  e  $(2, 1, -1)$

Como  $(1, -1, 1) \cdot (0, 1, 1) = 0 - 1 + 1 = 0$  e

$(1, -1, 1) \cdot (2, 1, -1) = 2 - 1 - 1 = 0$ , então o plano definido pelas retas  $r$  e  $s$  é paralelo ao plano  $\pi$ .

## Teste n.º 3

Páginas 79 a 81

### Grupo I

1. Se  $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ , então:

$$\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2-k}{3} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq 2-k \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq -k \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq k \geq -1$$

$$\text{Logo, } k \in \left[-1, \frac{1}{2}\right].$$

A opção correta é a (A).

2.  $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 4 - 9 = -5$ , logo a afirmação (A) é verdadeira.

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v})^2 &= \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 4 - 2 + 9 = 11, \text{ logo a afirmação (B) é verdadeira.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) &= 2\vec{u} \cdot \vec{u} - 4\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= 2\|\vec{u}\|^2 - 5\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\|\vec{v}\|^2 = 8 + 5 + 18 = 31, \text{ logo a afirmação (C) é falsa.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\vec{u} \cdot (\vec{u} + 3\vec{v}) &= 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 6\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\|\vec{u}\|^2 + 6\vec{u} \cdot \vec{v} = \\ &= 8 - 6 = 2, \text{ logo a afirmação (D) é verdadeira.} \end{aligned}$$

A opção correta é a (C).

3. Um vetor normal ao plano  $\alpha$  é, por exemplo,  $(1, 1, -1)$ .

Na opção (A), um vetor normal ao plano dado é  $(3, 2, -5)$ . Então,  $(1, 1, -1) \cdot (3, 2, -5) = 3 + 2 + 5 = 10$ , pelo que este plano não é perpendicular a  $\alpha$ .

Na opção (B), um vetor normal ao plano dado é  $(4, -1, 3)$ . Então,  $(1, 1, -1) \cdot (4, -1, 3) = 4 - 1 - 3 = 0$ , pelo que este plano é perpendicular a  $\alpha$ . No entanto,  $4 \times 2 + 1 \times 3 \times 3 + 1 = 19$ , pelo que o ponto A não pertence a este plano. Logo, o plano dado é perpendicular a  $\alpha$  mas não contém o ponto A.

Na opção (C), um vetor normal ao plano dado é  $(5, -2, 3)$ . Então,  $(1, 1, -1) \cdot (5, -2, 3) = 5 - 2 - 3 = 0$ , pelo que este plano é perpendicular a  $\alpha$ . No entanto,  $5 \times 2 - 2 \times (-1) + 3 \times 3 + 7 = 28$ , pelo que o ponto A não pertence a este plano. Logo, o plano dado é perpendicular a  $\alpha$  mas não contém o ponto A.

Na opção (D), um vetor normal ao plano dado é  $(2, -1, 1)$ . Então,  $(1, 1, -1) \cdot (2, -1, 1) = 2 - 1 - 1 = 0$ , pelo que este plano é perpendicular a  $\alpha$  e  $2 \times 2 - (-1) + 3 - 8 = 0$ , pelo que o ponto A pertence a este plano. Logo, o plano dado é perpendicular a  $\alpha$  e contém o ponto A.

A opção correta é a (D).

$$\begin{aligned} 4. u_{n+1} - u_n &= -\frac{2n+1}{3n+4} + \frac{2n-1}{3n+1} = \\ &= \frac{-6n^2 - 3n - 2n - 1 + 6n^2 - 3n + 8n - 4}{(3n+4)(3n+1)} = \\ &= \frac{-5}{(3n+4)(3n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo,  $(u_n)$  é decrescente.

$$u_n = -\frac{2n-1}{3n+1} = -\frac{2}{3} + \frac{\frac{5}{3}}{3n+1}$$

Como  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{\frac{5}{3}}{3n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$  e, portanto,

$$-\frac{2}{3} + \frac{\frac{5}{3}}{3n+1} > -\frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como  $(u_n)$  é decrescente, então  $u_n \leq u_1 = -\frac{1}{4}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Assim,  $-\frac{2}{3} < u_n \leq -\frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$ , ou seja, a sucessão  $(u_n)$  é limitada.

$$\lim u_n = \lim \left( -\frac{2n-1}{3n+1} \right) = \lim \left( -\frac{2 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n}} \right) = -\frac{2}{3},$$

logo a sucessão  $(u_n)$  é convergente para  $-\frac{2}{3}$ .

A opção correta é a (D).

5. Como as medidas de amplitude dos ângulos internos do triângulo estão em progressão aritmética e a menor delas é  $24^\circ$ , então:

$$\begin{aligned} 24 + (24 + x) + (24 + 2x) &= 180 \Leftrightarrow 72 + 3x = 180 \\ &\Leftrightarrow 3x = 108 \\ &\Leftrightarrow x = 36 \end{aligned}$$

Logo, a amplitude do ângulo maior é:

$$24^\circ + 2 \times 36^\circ = 96^\circ$$

A opção correta é a (C).

### Grupo II

1. Pela Lei dos Cossenos:

$$\overline{AC}^2 = 3,6^2 + 4,1^2 - 2 \times 3,6 \times 4,1 \times \cos 48^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 29,77 - 29,52 \cos 48^\circ$$

$$\text{Logo, } \overline{AC} = \sqrt{29,77 - 29,52 \cos 48^\circ} \approx 3,165.$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sin 39^\circ}{3,165} = \frac{\sin (\hat{CAB})}{4,1} \Leftrightarrow \sin (\hat{CAB}) = \frac{4,1 \sin 39^\circ}{3,165}$$

$$\text{Logo, } \hat{CAB} \approx 54,6^\circ.$$

2.

2.1.  $m = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$

Assim, AC:  $y = -\sqrt{3}x + b$ .

Como o ponto A pertence à reta AC, então:

$$3 = -\sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = 3 + \sqrt{3}$$

Logo, AC:  $y = -\sqrt{3}x + 3 + \sqrt{3}$  e  $C(0, 3 + \sqrt{3})$ .

2.2. Seja  $T(x, y)$  um ponto da reta tangente no ponto B à circunferência de centro A e que passa em B.

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{BT} &= 0 \Leftrightarrow (-3, -2) \cdot (x + 2, y - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x - 6 - 2y + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2y = -3x - 4 \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x - 2, \text{ que é a equação pe-} \\ &\text{dida.}\end{aligned}$$

3.  $\vec{BP} \cdot \vec{CQ} = (\vec{BA} + \vec{AP}) \cdot (\vec{CA} + \vec{AQ}) =$   
 $= \vec{BA} \cdot \vec{CA} + \vec{BA} \cdot \vec{AQ} + \vec{AP} \cdot \vec{CA} + \vec{AP} \cdot \vec{AQ} =$   
 $= 0 + \|\vec{AB}\| \times \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \times \cos 180^\circ + \|\vec{AB}\| \times$   
 $\times \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \times \cos 180^\circ + 0 =$   
 $= -\frac{1}{2} \|\vec{AB}\|^2 - \frac{1}{2} \|\vec{AB}\|^2 =$   
 $= -\|\vec{AB}\|^2$

4.

4.1. B é o ponto de interseção da reta BC com o plano  $xOy$ :

$$(x, y, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right) + k(-1, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - k \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 = 2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ k = -2 \end{cases}$$

Logo,  $B\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ .

C é o ponto de interseção da reta BC com o plano  $yOz$ :

$$(0, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right) + k(-1, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -\frac{1}{2} - k \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z = 2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Logo,  $C\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .

O ponto A pertence ao eixo  $Oy$ , logo é da forma  $(0, y, 0)$ . Como  $[OAC]$  é um triângulo equilátero, a ordenada de C é metade da ordenada de A, logo  $A(0, \sqrt{3}, 0)$ .

4.2. O vetor  $\vec{v}(-1, 0, 1)$  é um vetor diretor da reta BC e pertence ao plano OBC.

O ponto  $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$  pertence à reta BC, logo

o vetor  $\vec{OP}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$  pertence ao plano OBC.

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo normal ao plano OBC.

$$\begin{aligned}\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{OP} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 0, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a + c = 0 \\ -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + 2c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ -c + \sqrt{3}b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ \sqrt{3}b = -3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -\sqrt{3}c \end{cases}\end{aligned}$$

Assim,  $\vec{u}(c, -\sqrt{3}c, c)$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Consideremos, por exemplo,  $\vec{u}(1, -\sqrt{3}, 1)$ .

Então, uma equação cartesiana do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano OBC é:

$$\begin{aligned}1(x - 0) - \sqrt{3}(y - \sqrt{3}) + 1(z - 0) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y + 3 + z &= 0 \\ \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y + z + 3 &= 0\end{aligned}$$

5.

5.1.  $u_n = -2 \Leftrightarrow -\frac{3n-1}{n+2} = -2$   
 $\Leftrightarrow \frac{3n-1}{n+2} = 2$   
 $\Leftrightarrow 3n-1 = 2n+4$   
 $\Leftrightarrow n = 5$

Logo, -2 é o termo de ordem 5 da sucessão  $(u_n)$ .

5.2.  $u_n = -\frac{3n-1}{n+2} = -3 + \frac{7}{n+2}$

Sabe-se que  $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , logo:

$$\begin{aligned}0 < \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 0 < \frac{7}{n+2} \leq \frac{7}{2} \\ &\Leftrightarrow -3 < -3 + \frac{7}{n+2} \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Ou seja,  $-3 < u_n \leq \frac{1}{2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , o que significa que a sucessão  $(u_n)$  é limitada.

**5.3.** Pretende-se provar que  $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| -\frac{3n-1}{n+2} + 3 \right| < \delta.$$

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

$$\begin{aligned} \left| -\frac{3n-1}{n+2} + 3 \right| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{7}{n+2} \right| < \delta \\ &\Leftrightarrow \frac{7}{n+2} < \delta \\ &\Leftrightarrow 7 < (n+2)\delta \quad (\text{porque } n+2 > 0, \\ &\quad \forall n \in \mathbb{N}) \\ &\Leftrightarrow 7 < n\delta + 2\delta \\ &\Leftrightarrow n\delta > 7 - 2\delta \\ &\Leftrightarrow n > \frac{7-2\delta}{\delta} \end{aligned}$$

Assim, se  $n > \frac{7-2\delta}{\delta}$ , então  $\left| -\frac{3n-1}{n+2} + 3 \right| < \delta$  e,

portanto, se  $p > \frac{7-2\delta}{\delta}$ , fica provado que

$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N},$

$n \geq p \Rightarrow \left| -\frac{3n-1}{n+2} + 3 \right| < \delta$ , ou seja, que

$$\lim \left( -\frac{3n-1}{n+2} \right) = -3.$$

**6.**

**6.1.** A razão entre as medidas dos lados dos triângulos

é  $\frac{1}{2}$ , logo a razão entre as medidas das respetivas áreas é  $\frac{1}{4}$ . Logo,  $\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1}{4}$  (constante),  $\forall n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $(A_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{4}$ .

$$A_1 = \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

#### Cálculo auxiliar

Pelo Teorema de Pitágoras, sendo  $h$  a altura do primeiro triângulo:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$\text{Então, } h = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

$$\text{Logo, } A_n = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{6.2. } \lim S_n &= \lim \left( \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}a^2}{4 \times \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{3} \end{aligned}$$

**7.** Seja  $P(n)$ :  $2^{2n-1} + 1$  é divisível por 3.

**P(1):**  $2^{2-1} + 1 = 2 + 1 = 3$  é divisível por 3.

Logo,  $P(1)$  é verdadeira.

**Hipótese:**  $2^{2n-1} + 1$  é divisível por 3.

**Tese:**  $2^{2n+1} + 1$  é divisível por 3.

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} 2^{2n+1} + 1 &= 2^{2n-1} \times 2^2 + 1 = \\ &= 2^{2n-1} \times 2^2 + 2^2 - 2^2 + 1 = \\ &= 2^2(2^{2n-1} + 1) - 2^2 + 1 = \\ &= 4 \times (2^{2n-1} + 1) - 3 \end{aligned}$$

Por hipótese,  $2^{2n-1} + 1$  é divisível por 3, logo

$4 \times (2^{2n-1} + 1)$  é divisível por 3. Como 3 também é divisível por 3, e a diferença entre dois números divisíveis por 3 é ainda divisível por 3, então

$4 \times (2^{2n-1} + 1) - 3$  é divisível por 3.

Logo,  $2^{2n+1} + 1$  é divisível por 3,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## Teste n.º 4

Páginas 84 a 86

Grupo I

$$1. \cos(\pi + \alpha) > 0 \Leftrightarrow -\cos \alpha > 0 \Leftrightarrow \cos \alpha < 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0 \Leftrightarrow -\sin \alpha > 0 \Leftrightarrow \sin \alpha < 0$$

$$\text{Logo, } \alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[.$$

Assim:

$$\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg} \alpha > 0$$

$$\text{tg}(\alpha - \pi) = \text{tg} \alpha > 0$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha > 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha < 0$$

A opção correta é a (B).

$$\begin{aligned} 2. \vec{AE} \cdot \vec{ED} &= (\vec{AB} + \vec{BE}) \cdot (\vec{EC} + \vec{CD}) = \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{EC} + \vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{BE} \cdot \vec{EC} + \vec{BE} \cdot \vec{CD} = \\ &= 0 + a \times a \times \cos 180^\circ + \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \cos 0^\circ + 0 = \\ &= -a^2 + \frac{a^2}{4} = \\ &= -\frac{3}{4}a^2 \end{aligned}$$

A opção correta é a (A).

$$3. u_1 = a$$

$$u_2 = (a+1)(a-1) = a^2 - 1$$

$$u_3 = (a^2 - 1 + 1)(a^2 - 1 - 1) = a^2(a^2 - 2) = a^4 - 2a^2$$

A opção correta é a (A).

$$4. \lim u_n = \lim \frac{3n}{1-n} = \lim \frac{3}{\frac{1}{n}-1} = -3^-$$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x+1}{x+3} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$

A opção correta é a (A).

5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ , logo o gráfico de  $f$  poderá ter uma assíntota oblíqua de declive  $-1$ . Nas opções (B) e (C) esta situação é impossível.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ , logo o gráfico de  $f$  tem uma assíntota vertical em  $x = 0$ . Na opção (A) tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

A opção correta é a (D).

## Grupo II

1.

$$1.1. \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\overline{PA}} \Leftrightarrow \overline{PA} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\overline{PA} = \overline{QC}$$

$$\overline{OQ} = \overline{OP} = 1 - \overline{PA} = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$A(\alpha) = A_{[ABCD]} - A_{[OPQ]} - A_{[PAB]} - A_{[CQB]} =$$

$$= 1 - \frac{\left(1 - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2}{2} - 2 \times \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \times 1}{2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}\right) - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\cos^2 \alpha}{2 \operatorname{sen}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha}\right)$$

- 1.2. Se  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ , então a inclinação, em radianos, da reta  $PB$  é  $\frac{\pi}{3}$ . Logo, o declive desta reta é  $m = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ .

O declive de qualquer reta perpendicular à reta  $PB$  é, então,  $-\frac{1}{m} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ . Assim, a equação reduzida da reta perpendicular a  $PB$  que

passa no ponto  $A$  é da forma  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ .

Uma vez que o ponto  $A(1, 0)$  pertence a esta reta:

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + b \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo, a equação reduzida da reta perpendicular a  $PB$  que passa no ponto  $A$  é  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

2.

- 2.1. Um vetor normal a um plano da família de planos dada é  $\vec{n}(1, m, m)$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .

Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(2, -1, 2)$ .

Para esta reta ser paralela ao plano:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow (1, m, m) \cdot (2, -1, 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - m + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -2$$

- 2.2. Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor, não nulo, normal ao plano  $\beta$ .

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, -2, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 1, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 4a + c = 0 \\ b = -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -5a \\ b = -2a \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}(a, -2a, -5a)$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Então, por exemplo,  $\vec{u}(1, -2, -5)$  é um vetor normal ao plano  $\beta$ .

Um vetor normal ao plano  $\alpha$  é  $\vec{v}(1, -1, -1)$ .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, -2, -5) \cdot (1, -1, -1) = 1 + 2 + 5 = 8$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

Seja  $\theta$  o ângulo formado pelos dois vetores normais. Então:

$$\cos \theta = \frac{8}{\sqrt{30} \times \sqrt{3}}$$

Logo,  $\theta \approx 32,5^\circ$ .

3.

- 3.1. Seja  $P(n): 2 \leq u_n < 3$ .

$$P(1): 2 \leq u_1 < 3 \Leftrightarrow 2 \leq 2 < 3$$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $2 \leq u_n < 3$

**Tese:**  $2 \leq u_{n+1} < 3$

**Demonstração:**

Como, por hipótese,  $2 \leq u_n < 3 \Leftrightarrow 5 \leq u_n + 3 < 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{5} \leq \sqrt{u_n + 3} < \sqrt{6}$ , então  $\sqrt{5} \leq u_{n+1} < \sqrt{6}$  e,

em particular,  $2 \leq u_{n+1} < 3$ .

Logo,  $2 \leq u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$ .



**3.2.** Da alínea anterior e do enunciado resulta que  $(u_n)$  é uma sucessão monótona e limitada, pelo que é convergente.

Seja  $L = \lim u_n$ .

Então,  $L = \lim u_{n+1} = \lim (\sqrt{u_n + 3}) = \sqrt{L + 3}$ .

Ou seja:

$$L = \sqrt{L + 3} \Leftrightarrow L^2 = L + 3$$

$$\Leftrightarrow L^2 - L - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \vee L = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

Como,  $2 \leq u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$ , então  $L = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ .

**4.**

**4.1.** Como  $x = 2$  é uma assíntota vertical ao gráfico da função, então  $c = 2$ .

Como  $y = 4$  é uma assíntota horizontal ao gráfico da função, então  $a = 4$ .

Como  $\left(0, \frac{11}{2}\right)$  pertence ao gráfico da função:

$$f(0) = \frac{11}{2} \Leftrightarrow 4 + \frac{b}{0-2} = \frac{11}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4 - \frac{b}{2} = \frac{11}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8 - b = 11$$

$$\Leftrightarrow b = -3$$

**4.2.**

$$\mathbf{4.2.1.} \quad f(x) \leq \frac{9}{x} \Leftrightarrow \frac{4x-9}{x-2} \leq \frac{9}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-9}{x-2} - \frac{9}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 9x - 9x + 18}{x(x-2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 18x + 18}{x(x-2)} \leq 0$$

#### Cálculos auxiliares

$$4x^2 - 18x + 18 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm 3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{3}{2}$$

$x$	$-\infty$	0		$\frac{3}{2}$		2		3	$+\infty$
$4x^2 - 18x + 18$	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$x(x-2)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{4x^2 - 18x + 18}{x(x-2)}$	+	n.d.	-	0	+	n.d.	-	0	+

$$\text{C.S.} = \left]0, \frac{3}{2}\right] \cup ]2, 3]$$

$$\mathbf{4.2.2.} \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x-9}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x-9=0 \wedge x-2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$$

Logo,  $A\left(\frac{9}{4}, 0\right)$ .

$$f(0) = \frac{0-9}{0-2} = \frac{9}{2}$$

Logo,  $C\left(0, \frac{9}{2}\right)$ .

$$\text{Assim, } A_{[OABC]} = \overline{OA} \times \overline{OC} = \frac{9}{4} \times \frac{9}{2} = \frac{81}{8} \text{ u.a.}$$

**5.**

$$\mathbf{5.1.} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(k + \frac{5x+1}{3x+1}\right) = k+1 = f(0)$$

Para que a função  $f$  seja contínua em  $x = 0$ ,

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \text{ ou seja, } k+1=0 \Leftrightarrow k=-1.$$

**5.2.** Uma vez que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = 0$ ,

então  $x = 0$  não é uma assíntota vertical ao gráfico da função  $f$ .

Como  $f$  é contínua em  $]-\infty, 0[$ , por se tratar da soma de duas funções contínuas, então não pode haver outras assíntotas verticais ao seu gráfico.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right) =$$

$$= -1 + 1 = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Logo,  $y = 0$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

## Teste n.º 5

Páginas 89 a 92

### Grupo I

1.  $x^2 + y^2 = 3$  é uma equação da circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio  $\sqrt{3}$ .

A reta  $r$  é tangente a esta circunferência no ponto de coordenadas  $(\sqrt{3}, 0)$ , que é um dos pontos de interseção da reta com o eixo  $Ox$ . Logo,  $r: x = \sqrt{3}$ . Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(0, 1)$ .

Seja  $P(x, y)$  um ponto da reta  $s$ :

$$(1, \sqrt{2}) \cdot (x - 1, y - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x - 1 + \sqrt{2}y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ que é a equação reduzida da reta } s.$$

Como o declive da reta  $s$  é  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ , um vetor diretor desta reta é  $\vec{s}(-2, \sqrt{2})$ .

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = (0, 1) \cdot (-2, \sqrt{2}) = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{r}\| = 1$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + 2} = \sqrt{6}$$

Logo, sendo  $\alpha$  a amplitude, em graus, do ângulo formado pelas duas retas,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{1 \times \sqrt{6}}$  e, portanto,  $\alpha \approx 55^\circ$ .

A opção correta é a (C).

2.  $-1 \leq \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo,  $(u_n)$  é uma sucessão limitada.

A opção correta é a (D).

3.  $D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0\right\}$

$x$	$-\infty$	$-3$		$-2$		$1$		$2$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	+	+	0	-	0	+
$g(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$\frac{f(x)}{g(x)}$	+	0	-	n.d.	+	0	-	n.d.	-

Logo,  $D_h = ]-\infty, -3] \cup ]-2, 1]$ .

A opção correta é a (B).

4.  $f'(1) = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3$

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x - 1)(x - 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 3} = \\ &= 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

#### Cálculo auxiliar

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

A opção correta é a (A).

### 5.

$x$	$-\infty$	$a$		$b$		$c$	$+\infty$
Sinal de $f'$	-	0	+	0	-	0	+
Variação de $f$	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

A opção correta é a (B).

### Grupo II

#### 1.

- 1.1. Um vetor normal ao plano  $ABF$  é  $\vec{u}(6, 2, -3)$ .

O plano  $CHG$  é estritamente paralelo ao plano  $ABF$ . Logo,  $\vec{u}$  é também um vetor normal ao plano  $CHG$ .

Como  $D(17, 1, -1)$  pertence ao plano  $CHG$ , então:

$$6(x - 17) + 2(y - 1) - 3(z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - 102 + 2y - 2 - 3z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x + 2y - 3z - 107 = 0$$

- 1.2. O ponto  $E$  é o ponto de interseção da reta  $EH$  com o plano  $EBF$ .

$$EH: (x, y, z) = (1, -2, 14) + k(-12, -4, 6), k \in \mathbb{R}$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} x = 1 - 12k \\ y = -2 - 4k, k \in \mathbb{R}, \text{ são as coordenadas de} \\ z = 14 + 6k \end{cases}$$

um ponto genérico desta reta.

Substituindo na equação do plano, vem:

$$6(1 - 12k) + 2(-2 - 4k) - 3(14 + 6k) - 58 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 - 72k - 4 - 8k - 42 - 18k - 58 = 0$$

$$\Leftrightarrow -98 - 98k = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -1$$

Assim,  $E(13, 2, 8)$ .

2.

21. Seja  $P(n)$ :  $u_n > 1$ .

$P(1)$ :  $7 > 1$

Logo,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

Hipótese:  $u_n > 1$

Tese:  $u_{n+1} > 1$

Demonstração:

$$u_n > 1 \Leftrightarrow u_n + 2 > 3 \Leftrightarrow \frac{u_n + 2}{3} > 1 \Leftrightarrow u_{n+1} > 1$$

Logo,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 1$ .

2.2.  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2}{3} - u_n = \frac{u_n + 2 - 3u_n}{3} = \frac{2 - 2u_n}{3}$

Como, da alínea anterior,  $u_n > 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , então:

$$2u_n > 2 \Leftrightarrow -2u_n < -2 \Leftrightarrow 2 - 2u_n < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - 2u_n}{3} < 0$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, a sucessão  $(u_n)$  é decrescente.

2.3.  $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = \frac{\frac{u_n + 2}{3} - 1}{u_n - 1} =$   
 $= \frac{\frac{u_n + 2 - 3}{3}}{u_n - 1} = \frac{u_n - 1}{3(u_n - 1)} = \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma vez que  $\frac{1}{3}$  é uma constante, então  $(v_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{3}$ .

$$v_n = u_1 - 1 = 7 - 1 = 6$$

Assim, o termo geral de  $(v_n)$  é  $v_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ .

3.  $g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$x$	$-\infty$	$-2$		$3$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	+	+
$f(x-1)$	-	0	+	0	-
$\frac{g(x)}{f(x-1)}$	+	n.d.	+	n.d.	-

Assim, C.S. =  $]-\infty, -2[ \cup ]-2, 3[$ .

4. Uma vez que a reta de equação  $y = -x + 1$  é uma assíntota ao gráfico de  $f$ , tem-se que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = 1$ .

Assim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) - x^2}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(x) - x)(f(x) + x)}{f(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x) - x}{f(x)} \times (f(x) + x) \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \left(1 - \frac{x}{f(x)}\right) \times (f(x) + x) \right) = \left(1 - \frac{1}{-1}\right) \times 1 = 2$$

Logo,  $y = 2$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $g$ .

5.

5.1.  $f(1) = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} [(x+1)(\sqrt{x}+1)] = 2 \times 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 8x - 10}{x^2 + x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 8x - 10}{x^2 + x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x+5)(x-1)}{(x-1)(x+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x+5)}{x+2} = \frac{12}{3} = 4$$

Como  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ , então  $f$  é contínua em  $x = 1$ .

5.2. Se  $x > 1$ , então:

$$f'(x) = \left( \frac{2x^2 + 8x - 10}{x^2 + x - 2} \right)' =$$

$$= \frac{(4x + 8)(x^2 + x - 2) - (2x + 1)(2x^2 + 8x - 10)}{(x^2 + x - 2)^2} =$$

$$= \frac{4(x+2)(x-1)(x+2) - (2x+1)2(x+5)(x-1)}{[(x-1)(x+2)]^2} =$$

$$= \frac{2(x-1)[2(x+2)^2 - (2x+1)(x+5)]}{[(x-1)(x+2)]^2} =$$

$$= \frac{2(2x^2 + 8x + 8 - 2x^2 - 11x - 5)}{(x-1)(x+2)^2} =$$

$$= \frac{2(3-3x)}{(x-1)(x+2)^2} =$$

$$= \frac{-6(x-1)}{(x-1)(x+2)^2} =$$

$$= -\frac{6}{(x+2)^2}$$

5.3.  $f(2) = \frac{8 + 16 - 10}{4 + 2 - 1} = \frac{7}{2}$

$$f'(2) = -\frac{6}{(2+2)^2} = -\frac{3}{8}$$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 2 é do tipo  $y = -\frac{3}{8}x + b$ .

$$\frac{7}{2} = -\frac{3}{8} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{17}{4}$$

Logo,  $y = -\frac{3}{8}x + \frac{17}{4}$  é a equação pretendida.

6.

6.1.  $t.m.v._{[0,2]} =$

$$= \frac{-\frac{1}{10} \times 2(2^2 - 19 \times 2 - 20) - \left(-\frac{1}{10}\right) \times (-20)}{2 - 0} =$$

$$= 4,4 \text{ m/s}$$

6.2.  $p'(t) = -\frac{1}{10}(t^2 - 19t - 20 + t(2t - 19)) =$ 

$$= -\frac{1}{10}(3t^2 - 38t - 20)$$

$$p'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{10}(3t^2 - 38t - 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 38t - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{38 \pm \sqrt{38^2 + 12 \times 20}}{6}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{38 \pm \sqrt{1684}}{6}$$

Logo,  $t \approx -0,506 \vee t \approx 13,173$ .

$t$	0		13,173		20
Sinal de $p'$		+	0	-	
Variação de $p$		$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	

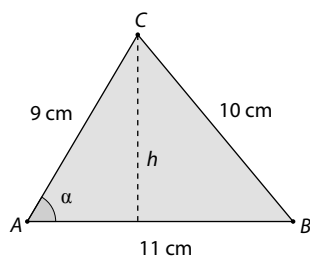
$$p(13,173) = -\frac{1}{10} \times 13,173(13,173^2 - 19 \times 13,173 - 20)$$

$$\approx 127,461$$

A profundidade máxima atingida pelo mergulhador foi 127 metros e ocorreu aos 13 minutos de mergulho.

**Teste n.º 6****Páginas 95 a 98****Grupo I**

1. Pela Lei dos Cossenos:



$$10^2 = 11^2 + 9^2 - 2 \times 11 \times 9 \times \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow 100 = 202 - 198 \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow 198 \cos \alpha = 102$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{17}{33}$$

Assim:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{17}{33}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{800}{1089}$$

Como  $\alpha$  é um ângulo agudo, então  $\sin \alpha = \sqrt{\frac{800}{1089}}$ .

Mas,  $\sin \alpha = \frac{h}{9}$ . Logo,  $h = 9 \times \sqrt{\frac{800}{1089}}$ .

Logo, a área do triângulo é:

$$\frac{11 \times 9 \times \sqrt{\frac{800}{1089}}}{2} \approx 42,4 \text{ cm}^2$$

A opção correta é a (A).

2. As retas  $AB$  e  $DH$  não são estritamente paralelas nem concorrentes, logo não definem um plano.As retas  $AB$  e  $CE$  não são estritamente paralelas nem concorrentes, logo não definem um plano.Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $M$  são colineares, logo não definem um plano.Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $H$  são pontos não colineares, logo definem um plano.

A opção correta é a (C).

3.  $\sum_{k=1}^{100} u_k = 100 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 = 100$

$$\Leftrightarrow \frac{u_1 + (u_1 + 99r)}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2u_1 + 99r = 2$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 1 - \frac{99}{2}r$$

$$\sum_{k=1}^{200} u_k = 300 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{200}}{2} \times 200 = 300$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_1 + (u_1 + 199r)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2u_1 + 199r = 3$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{99}{2}r\right) + 199r = 3$$

$$\Leftrightarrow 2 - 99r + 199r = 3$$

$$\Leftrightarrow 100r = 1$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow r = 0,01$$

A opção correta é a (C).

4.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{3-x}} =$ 

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{a}{x-3}\right) = 1 + \frac{a}{-3} = 1 - \frac{a}{3}$$

Para que a função seja contínua em  $x = 0$ :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{a}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} = 3 - a \\ b = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - \sqrt{3} \\ b = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

A opção correta é a (B).

5. Por observação do gráfico, conclui-se que  $r > 0$  e  $a > 0$ .

A opção correta é a (A).

## Grupo II

1.

1.1.  $f(\alpha) = 2 \Leftrightarrow 4 \cos \alpha = 2 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$

Como  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , então  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

$$\begin{aligned} & \arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right) \times \arcsen\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \\ & = \arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \times \arcsen\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \\ & = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \\ & = \frac{\pi}{3} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi^2}{9} \end{aligned}$$

1.2.  $f(x) = \sin x + 3 \cos x \Leftrightarrow 4 \cos x = \sin x + 3 \cos x$   
 $\Leftrightarrow \cos x = \sin x$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee \underbrace{x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi}_{\text{Equação impossível}}, k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{R}$$

- 1.3. Sendo  $\beta$  a amplitude do ângulo  $BOC$ :

$$A = \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\beta \times 2^2}{2} = \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow 2\beta = \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow \beta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Assim, } \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

2.

- 2.1.  $\vec{AB} = (-1, 2, 0) - (2, 3, 1) = (-3, -1, -1)$  é um vetor diretor da reta  $AB$ .

Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(2, 1, -1)$ .

Seja  $\vec{u}(a, b, c)$  um vetor não nulo ortogonal ao plano definido pelas retas  $AB$  e  $r$ .

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-3, -1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 1, -1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a - b - c = 0 \\ 2a + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3a - b \\ 2a + b + 3a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 2b = -5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3a + \frac{5}{2}a \\ b = -\frac{5}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{1}{2}a \\ b = -\frac{5}{2}a \end{cases}$$

Assim,  $\vec{u}\left(a, -\frac{5}{2}a, -\frac{1}{2}a\right), a \in \mathbb{R}$ .

Consideremos, por exemplo,  $\vec{u}(2, -5, -1)$ .

Como o ponto  $A(2, 3, 1)$  pertence ao plano, então:

$$2(x-2) - 5(y-3) - 1(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4 - 5y + 15 - z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 5y - z + 12 = 0, \text{ que é a equação pretendida.}$$

2.2.  $\vec{AB} = (-1, 2, 0) - (2, 3, 1) = (-3, -1, -1)$

$$\vec{r}(2, 1, -1)$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{r} = (-3, -1, -1) \cdot (2, 1, -1) = -6 - 1 + 1 = -6$$

Logo, sendo  $\alpha$  a amplitude do ângulo entre os vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{r}$ , tem-se que  $\cos \alpha = \frac{-6}{\sqrt{11} \times \sqrt{6}}$ .

Assim,  $\alpha \approx 137,6^\circ$ .

3.

- 3.1. Seja  $(u_n)$  a sucessão dos comprimentos dos segmentos da linha poligonal definida.

$$\text{Tem-se que } \begin{cases} u_1 = 12 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2}{3} u_n}{u_n} = \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que  $\frac{2}{3}$  é uma constante, então  $(u_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{2}{3}$ .

$$\text{Logo, } u_n = 12 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

$$3.2. \lim \left[ 12 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \right] = 12 \times \frac{1 - 0}{\frac{1}{3}} = 36$$

4. Seja  $P(n): \sum_{i=1}^n (3i^2 + i) = n(n+1)^2$

$$P(1): 3 \times 1^2 + 1 = 1 \times (1+1)^2 \Leftrightarrow 3 + 1 = 2^2 \Leftrightarrow 4 = 4$$

Assim,  $P(1)$  é uma proposição verdadeira.

**Hipótese:**  $\sum_{i=1}^n (3i^2 + i) = n(n+1)^2$

**Tese:**  $\sum_{i=1}^{n+1} (3i^2 + i) = (n+1)(n+2)^2$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (3i^2 + i) &= \sum_{i=1}^n (3i^2 + i) + [3(n+1)^2 + (n+1)] = \\ &= n(n+1)^2 + 3(n+1)^2 + (n+1) = \\ &= (n+1)[n(n+1) + 3(n+1) + 1] = \\ &= (n+1)(n^2 + n + 3n + 3 + 1) = \\ &= (n+1)(n^2 + 4n + 4) = \\ &= (n+1)(n+2)^2 \end{aligned}$$

Assim,  $\sum_{i=1}^n (3i^2 + i) = n(n+1)^2, \forall n \in \mathbb{N}$ .

5.

$$5.1. \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^-} \frac{4x+1}{2x+3} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$

Logo,  $x = -\frac{3}{2}$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

Uma vez que  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ , por se tratar de uma função racional, então não há outras assíntotas verticais.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+1}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = 2$$

Logo,  $y = 2$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$  quando  $x$  tende para  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = 2$$

Logo,  $y = 2$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$  quando  $x$  tende para  $-\infty$ .

$$\begin{aligned} 5.2. f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{4x+1}{2x+3} = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x+1 = 0 \wedge 2x+3 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Logo, o ponto  $A$  tem coordenadas  $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{4x+1}{2x+3}\right)' = \frac{4(2x+3) - 2(4x+1)}{(2x+3)^2} = \\ &= \frac{8x+12-8x-2}{(2x+3)^2} = \\ &= \frac{10}{(2x+3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'\left(-\frac{1}{4}\right) &= \frac{10}{\left(2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 3\right)^2} = \frac{10}{\left(-\frac{1}{2} + 3\right)^2} = \\ &= \frac{10}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{10}{\frac{25}{4}} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $A$  é do tipo  $y = \frac{8}{5}x + b$ .

Como o ponto  $A$  pertence a esta reta, vem:

$$0 = \frac{8}{5} \times \left(-\frac{1}{4}\right) + b \Leftrightarrow b = \frac{2}{5}$$

Assim, a equação pretendida é  $y = \frac{8}{5}x + \frac{2}{5}$ .

$$\begin{aligned} 5.3. f(x) \leq g(1) &\Leftrightarrow \frac{4x+1}{2x+3} \leq \frac{\sqrt{3+1}}{2+3} \\ &\Leftrightarrow \frac{4x+1}{2x+3} \leq \frac{2}{5} \\ &\Leftrightarrow \frac{4x+1}{2x+3} - \frac{2}{5} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{20x+5-4x-6}{5(2x+3)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{16x-1}{5(2x+3)} \leq 0 \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{16}$	$+\infty$
$16x-1$	-	-	-	0	+
$5(2x+3)$	-	0	+	+	+
$\frac{16x-1}{5(2x+3)}$	+	n.d.	-	0	+

Logo, C.S. =  $\left]-\frac{3}{2}, \frac{1}{16}\right]$ .

$$\begin{aligned} 5.4. g'(x) &= \left(\frac{\sqrt{3x^2+1}}{2x+3}\right)' = \\ &= \frac{\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}(2x+3) - 2\sqrt{3x^2+1}}{(2x+3)^2} = \\ &= \frac{6x(2x+3) - 4(3x^2+1)}{2(2x+3)^2\sqrt{3x^2+1}} = \\ &= \frac{12x^2+18x-12x^2-4}{2(2x+3)^2\sqrt{3x^2+1}} = \\ &= \frac{18x-4}{2(2x+3)^2\sqrt{3x^2+1}} = \\ &= \frac{9x-2}{(2x+3)^2\sqrt{3x^2+1}} \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{2}{9}$	$+\infty$
Sinal de $g'$	-	n.d.	-	0	+
Varição de $g$	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Assim, a função  $g$  é estritamente decrescente em  $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$  e em  $\left]-\frac{3}{2}, \frac{2}{9}\right]$  e é estritamente crescente em  $\left]\frac{2}{9}, +\infty\right[$ . A função  $g$  tem um mínimo relativo em  $x = \frac{2}{9}$ .

6.

$$6.1. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15} = \frac{235}{15} = \frac{47}{3} \approx 15,67$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{15} y_i}{15} = \frac{240}{15} = 16$$

$$6.2. a = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i y_i - 15 \bar{x} \bar{y}}{SS_x} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i y_i - 15 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^{15} (x_i)^2 - 15 \bar{x}^2} =$$

$$= \frac{3827 - 15 \times \frac{47}{3} \times 16}{3741 - 15 \left(\frac{47}{3}\right)^2} \approx 1,1292 \approx 1,13$$

$$b = \bar{y} - a \bar{x} \approx 16 + 1,1292 \times \frac{47}{3} \approx -1,69$$

Logo, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é  $y = 1,13x - 1,69$ .

$$6.3. r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} = a \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15} (x_i)^2 - 15 \bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{15} (y_i)^2 - 15 \bar{y}^2}}$$

$$\approx 1,1292 \sqrt{\frac{3741 - 15 \left(\frac{47}{3}\right)^2}{3952 - 15 \times 16^2}} \approx 0,82$$